



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Kontinuummekanik

*V - tynde konstruktionselementer*

Rathkjen, Arne

*Publication date:*  
1994

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Rathkjen, A. (1994). *Kontinuummekanik: V - tynde konstruktionselementer*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. R : Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet Bind R9439 Nr. 1994.2

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

---

TEAM 1994.2

---

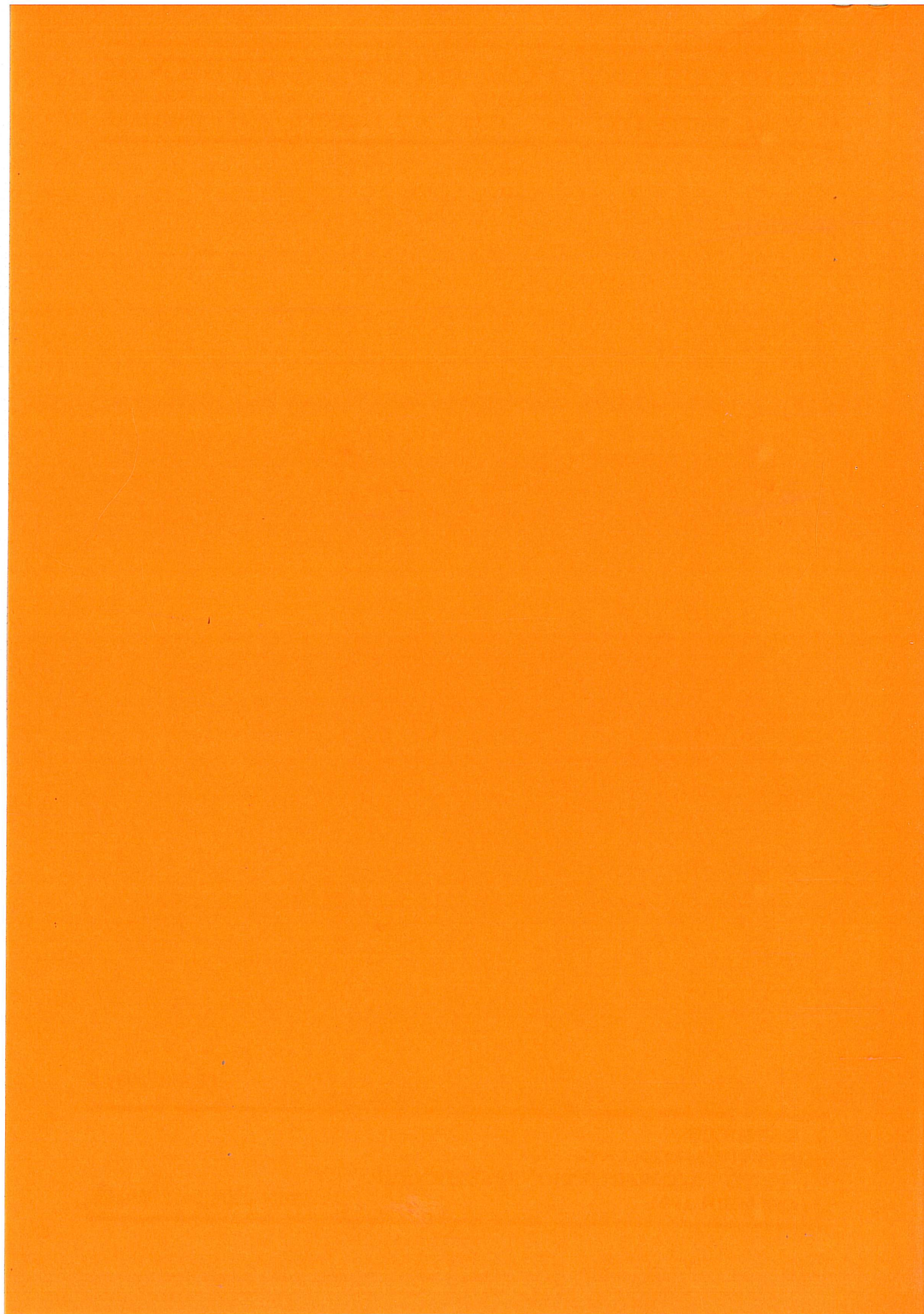
A. RATHKJEN  
KONTINUUMMEKANIK  
V - TYNDE KONSTRUKTIONSELEMENTER  
DECEMBER 1994

---

ISSN 0902-7513 R9439

---





---

# INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING  
AALBORG UNIVERSITET • AUC • AALBORG • DANMARK

---

TEAM 1994.2

---

A. RATHKJEN  
KONTINUUMMEKANIK  
V - TYNDE KONSTRUKTIONSELEMENTER  
DECEMBER 1994

ISSN 0902-7513 R9439

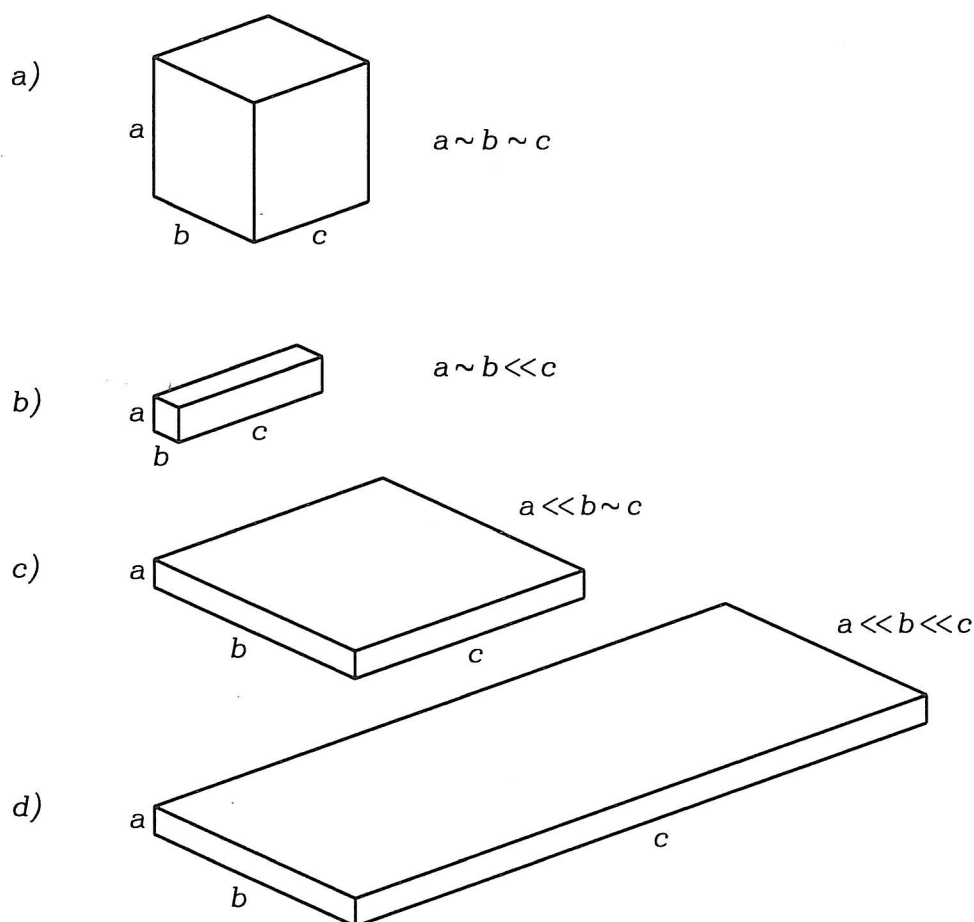
---





## V TYNDE KONSTRUKTIONSELEMENTER

Alle konstruktionselementer er tredimensionale, og til en fuldstændig løsning til et problem indenfor kontinuummeknikken hører en angivelse af kinematiske, dynamiske og energetiske størrelser som funktioner af den tredimensionale stedvektor og evolutionsparameteren. Ofte forekommer imidlertid konstruktionselementer, som med en vis tilnærmelse kan behandles, som var de en- eller todimensionale. I figur V.1 er vist nogle eksem-

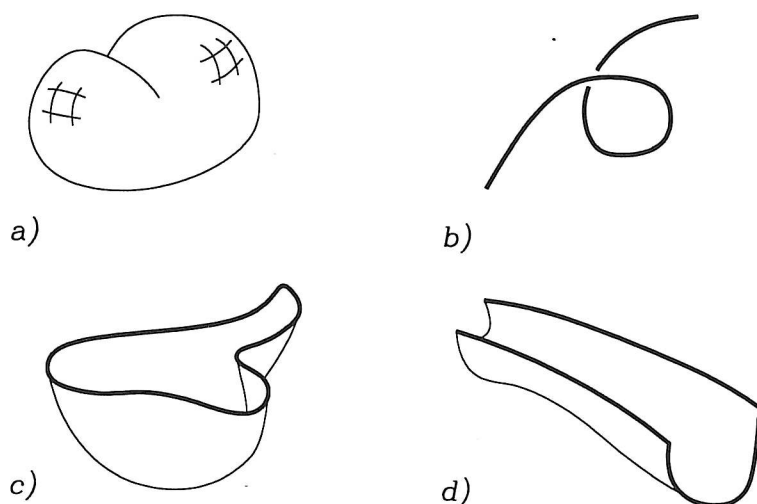


Figur V.1

pler, som tager udgangspunkt i et rektangulært parallellepipedum med sidelængderne  $a$ ,  $b$  og  $c$ , som er omtrent lige store (figur V.1a). Når  $a$  er omtrent lige så stor som  $b$ , og begge er små i forhold til  $c$  (figur V.1b), kan elementet behandles, som var det endimensionalt, og er  $a$  lille i forhold til  $b$  og  $c$ , som er omtrent lige store (figur V.1c), kan elementet behandles som todimensionalt. Er endelig  $a$  lille i forhold til  $b$ , som igen er lille i forhold til  $c$  (figur V.1d), kan elementet behandles som enten endimensionalt,



todimensionalt eller som en mellemting. Nogle mere generelle, men også idealiserede udgaver af disse elementer er vist i figur V.2.



Figur V.2

De i figur V.2a, b, c og d viste geometriske legemer er henholdsvis et massiv, en kurve, en flade og en båndformet flade. Som konstruktionselementer har de mange betegnelser. Her vil de blive benævnt henholdsvis massiv, bjælke, skal og tyndvægget bjælke.

I en- og todimensionale konstruktioner erstattes spændinger, kræfter pr. arealenhed, af spændingsresultanter, snitkræfter og snitmomenter henholdsvis snitkræfter og snitmomenter pr. længdeenhed, ligesom de tidligere indførte deformationsstørrelser erstattes af nye størrelser. Det er alene de størrelser, som indgår i en- eller todimensional beskrivelse af tredimensionale fænomener samt de ligninger, som disse størrelser skal tilfredsstille, der skal behandles i det følgende. Hvorledes man ud fra kendskabet til disse størrelser eventuelt bestemmer tredimensionale størrelser, ofte under simplificerende antagelser, skal ikke behandles i detaljer her.

I de udtryk der hidtil er udledt, er de indgående størrelser funktioner af den tredimensionale stedvektor  $\bar{r}$ . Dette gælder således for kraft- og momentligningerne (13.1-2).

$$\int_a \bar{\sigma} da + \int_v \rho \bar{b} dv = \int_v \rho \bar{a} dv \quad (13.1)$$

$$\int_a \bar{r} \times \bar{\sigma} da + \int_v \bar{r} \times \rho \bar{b} dv = \int_v \bar{r} \times \rho \bar{a} dv \quad (13.2)$$

og for effektligningen (16.9)

$$P_y = \dot{K} + P_i \quad (16.9)$$

hvor de ydre kræfters effekt og den kinetiske energi er henholdsvis

$$P_y = \int_a \bar{\sigma} \cdot \bar{v} da + \int_v \rho \bar{b} \cdot \bar{v} dv \quad (16.5)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_v \rho \bar{v} \cdot \bar{v} dv \quad (16.7)$$

Det gælder altså for spændingsvektoren  $\bar{\sigma}$ , massekraftvektoren  $\bar{b}$ , massefylden  $\rho$ , hastighedsvektoren  $\bar{v}$  og accelerationsvektoren  $\bar{a}$ , at de er funktioner af tre skalære parametre, jf. afsnit 2.4 og 8.3.1.

I tre dimensioner fører (13.1), (13.2) og (16.9) sammen med (16.5) og (16.7) til (13.4), (13.8) og (16.6)

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \bar{b} = \rho \bar{a} \quad (13.4)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (13.8)$$

$$P_i = \int_v \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dv \quad (16.6)$$

Det er de ligninger, der træder i stedet for (16.5) og 16.7) samt (13.4), (13.8) og (16.6), som her skal bestemmes for en- og todimensionale konstruktionselementer.

En- og todimensionale beskrivelser medfører naturligt nok simplere beregninger, men der er også andre forhold inde i billedet. Det er lettere at deformere tynde konstruktioner, så flytningerne sker vinkelret på den eller de retninger, hvori konstruktionerne har deres udstrækning end at fremkalde deformationer i udstrækningsretningerne. Dette medfører f.eks., at mere end en ligevægtsstilling kan være mulig for en given konstruktion med en given belastning, og man siger da, at konstruktionens ligevægtsstilling er instabil.

Afsnit 19, 20 og 21 omhandler en- og todimensionale konstruktioner, mens stabilitetsproblemet omtales i afsnit 22.



## 19. FRA 3 DIMENSIONER TIL 1

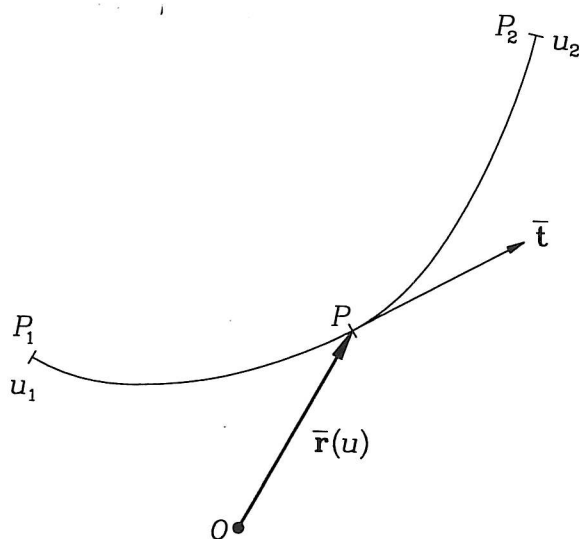
En endimensional beskrivelse af tredimensionale fænomener fremkommer ved at indføre størrelser, som alene er funktioner af en enkelt skalær parameter, her buelængden langs den kurve, som repræsenterer konstruktionen, og de geometriske størrelser, som beskriver denne referencekurve.

### 19.1 Kurver

Når stedvektoren  $\bar{r} = \overrightarrow{OP}$  fra det faste punkt  $O$  til punktet  $P$  er en funktion af en skalær parameter  $u$ ,

$$\bar{r} = \bar{r}(u) \quad (19.1)$$

vil  $P$  beskrive et kurvestykke i rummet, når  $u$  gennemløber værdierne fra  $u_1$  til  $u_2$ , se figur 19.1. Vektoren



Figur 19.1

$$\bar{t}(u) = d\bar{r}/du = \bar{r}' \quad (19.2)$$

er tangentvektoren til kurven. Skrives

$$\bar{t} = t \hat{t} \quad (19.3)$$

hvor  $t$  er tangentens længde og  $\hat{t}$  er enhedstangentvektoren, har man, at længden bestemmes ved

$$t^2 = \bar{t} \cdot \bar{t} = \bar{r}' \cdot \bar{r}' \quad (19.4)$$

Buelængden  $s(u)$ , fra et fast punkt  $P_0$  på kurven til et vilkårligt punkt  $P_a$ , bestemmes ved

$$s = \int_{u_0}^{u_a} t du \quad (19.5)$$

hvormed

$$t = ds/du \text{ og } d\bar{r} = \hat{t}ds = t\hat{t}du \quad (19.6)$$

Herefter kan man bestemme den afledede af enhedstangenten  $\hat{t}$  med hensyn til buelængden  $s$

$$d\hat{t}/ds = \frac{d}{du} \left( \frac{\bar{t}}{t} \right) \frac{du}{ds} = \frac{1}{t} \frac{d}{du} \left( \frac{\bar{t}}{t} \right) \quad (19.7)$$

Denne vektor bestemmer en retning  $\hat{n}$ , som betegnes kurvens hovednormal. Man kan nu skrive

$$d\hat{t}/ds = \kappa \hat{n} \quad (19.8)$$

hvor  $\kappa$  er krumningen.

Af

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = 1 \quad (19.9)$$

fås

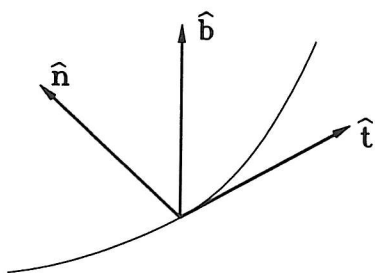
$$\hat{t} \cdot d\hat{t}/ds = 0 \quad (19.10)$$

dvs.  $d\hat{t}/ds$  og dermed  $\hat{n}$  er vinkelret på  $\hat{t}$ . Vektoren

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (19.11)$$

er binormalen, og de tre enhedsvektorer danner i ethvert punkt af kurven enhedsvektorsystemer, se figur 19.2.





Figur 19.2

For de ortogonale enhedsvektorer gælder

$$\begin{aligned}\hat{t} \cdot \hat{t} = \hat{n} \cdot \hat{n} = \hat{b} \cdot \hat{b} &= 1 \\ \hat{t} \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \hat{b} = \hat{b} \cdot \hat{t} &= 0\end{aligned}\tag{19.12}$$

hvoraf fås

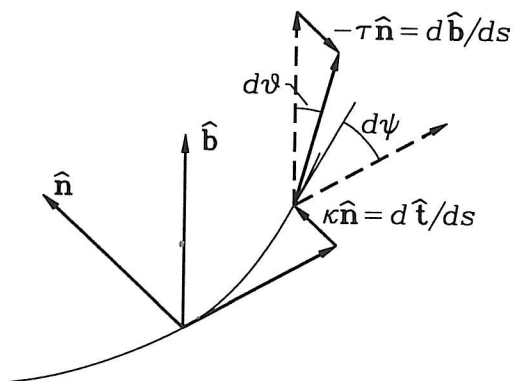
$$\begin{aligned}\hat{t} \cdot d\hat{t}/ds = \hat{n} \cdot d\hat{n}/ds = \hat{b} \cdot d\hat{b}/ds &= 0 \\ \hat{n} \cdot d\hat{t}/ds + \hat{t} \cdot d\hat{n}/ds = \hat{b} \cdot d\hat{n}/ds + \hat{n} \cdot d\hat{b}/ds \\ &= \hat{t} \cdot d\hat{b}/ds + \hat{b} \cdot d\hat{t}/ds = 0\end{aligned}\tag{19.13}$$

og man kan skrive

$$\begin{aligned}d\hat{t}/ds &= \kappa \hat{n} \\ d\hat{n}/ds &= -\kappa \hat{t} + \tau \hat{b} \\ d\hat{b}/ds &= -\tau \hat{n}\end{aligned}\tag{19.14}$$

som er Frenet's formler. Størrelsen  $\tau$  er torsionen.

Den geometriske betydning af krumningen  $\kappa$  og torsionen  $\tau$  er vist i figur 19.3.



Figur 19.3

Af figuren fremgår, at

$$\begin{aligned}\kappa &= d\psi/ds \\ \tau &= d\vartheta/ds\end{aligned}\tag{19.15}$$

hvor  $\psi$  er vinklen mellem tangenten og en fast retning i rummet, og  $\vartheta$  ligeledes er vinklen mellem binormalen og en fast retning i rummet. Mens krumningen  $\kappa$  altid er positiv, hvorved  $\hat{n}$ 's retning fastlægges, kan torsionen  $\tau$  være enten positiv eller negativ.

Indføres Darboux vektoren  $\bar{\delta}$  ved

$$\bar{\delta} = \tau \hat{t} + \kappa \hat{b}\tag{19.16}$$

har man

$$d\hat{t}/ds = \bar{\delta} \times \hat{t}, \quad d\hat{u}/ds = \bar{\delta} \times \hat{n}, \quad d\hat{b}/ds = \bar{\delta} \times \hat{b}\tag{19.17}$$

og med Darboux tensoren  $\bar{\bar{\Delta}} = \bar{\bar{I}} \times \bar{\delta}$

$$\bar{\bar{\Delta}} = \kappa(\hat{n}\hat{t} - \hat{t}\hat{n}) + \tau(\hat{b}\hat{n} - \hat{n}\hat{b})\tag{19.18}$$

har man

$$d\hat{t}/ds = \bar{\bar{\Delta}} \cdot \hat{t}, \quad d\hat{n}/ds = \bar{\bar{\Delta}} \cdot \hat{n}, \quad d\hat{b}/ds = \bar{\bar{\Delta}} \cdot \hat{b}\tag{19.19}$$

Benyttes indeksnotationen med

$$\begin{aligned}\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3 &= \hat{t}, \hat{n}, \hat{b} \\ \delta^1, \delta^2, \delta^3 &= \tau, 0, \kappa\end{aligned}\tag{19.20}$$

kan Darboux vektoren skrives

$$\bar{\delta} = \delta^k \hat{f}_k\tag{19.21}$$

og med de reciproke vektorer

$$\hat{f}^k = \delta^{kl} \hat{f}_l\tag{19.22}$$

kan identitetstensoren skrives

$$\bar{\bar{I}} = \hat{f}^k \hat{f}_k\tag{19.23}$$



og Darboux tensoren bliver

$$\bar{\bar{\Delta}} = \bar{\bar{I}} \times \bar{\delta} = e_{klm} \delta^m \hat{f}^l \hat{f}^k \quad (19.24)$$

Hermed bliver Frenet's ligninger

$$d\hat{f}_k/ds = \bar{\delta} \times \hat{f}_k = \bar{\bar{\Delta}} \cdot \hat{f}_k = e_{klm} \delta^m \hat{f}^l \quad (19.25)$$

Er en tensorfunktion  $\underline{L}(\bar{r})$  knyttet til punkter på kurven, har man

$$d\underline{L} = d\bar{r} \cdot \text{grad } \underline{L} \quad (19.26)$$

som med  $d\bar{r} = du\bar{t}$  kan skrives

$$d\underline{L} = du\bar{t} \cdot \text{grad } \underline{L} \quad (19.27)$$

hvormed gradienten af  $\underline{L}$  bliver

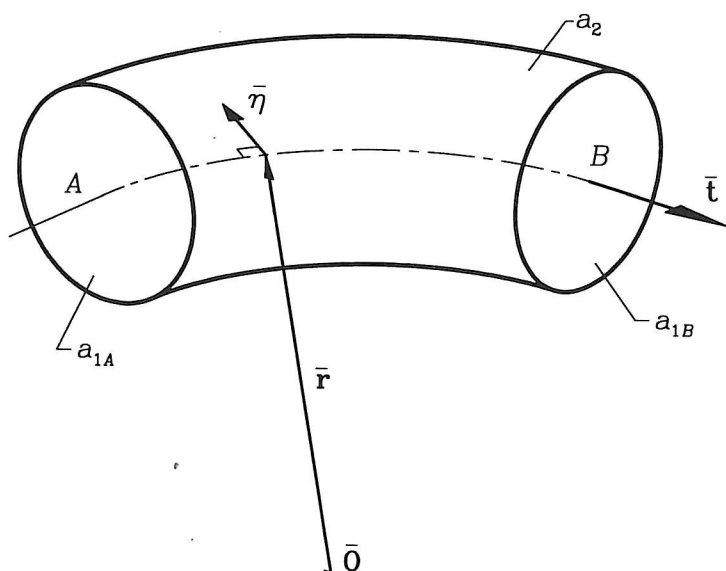
$$\text{grad } \underline{L} = (\bar{t}/t^2) d\underline{L}/du \quad (19.28)$$

Specielt når buelængden  $s$  benyttes som parameter, bliver

$$\text{grad } \underline{L} = \hat{t} d\underline{L}/ds \quad (19.29)$$

## 19.2 Bevægelsesligninger og effektligning for bjælker

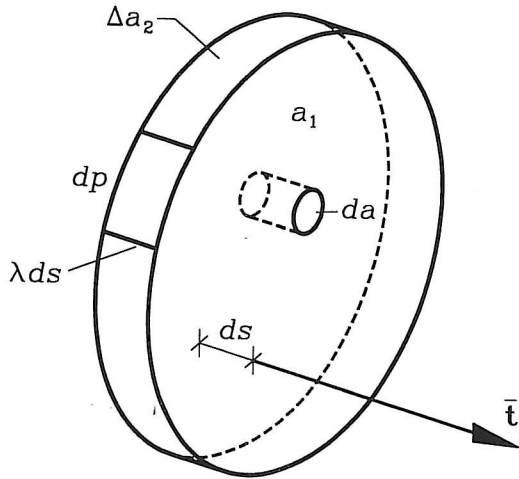
En del af et tredimensionalt konstruktionselement, der skal beskrives som endimensionalt, er vist i figur 19.4. Vektoren  $\bar{r}$  er stedvektor til den kurve, hvortil der refereres,



Figur 19.4

en kurve, der ofte betegnes bjælkeaksen. Kurvens positive gennemløbsretning angives ved tangentvektoren  $\hat{t}$ . Elementet begrænses af to tværsnit  $a_{1A}$  og  $a_{1B}$  i punkterne  $A$  og  $B$  på referencekurven samt overfladen  $a_2$ . Til ethvert punkt på referencekurven hører et tværsnit  $a_1$ , og stedvektoren til et vilkårligt punkt på et vilkårligt tværsnit betegnes  $\bar{r} + \bar{\eta}$ .

Et infinitesimalt element, begrænset af to tværsnit med indbyrdes afstand  $ds$  målt langs referencekurven og en del af overfladen  $\Delta a_2$ , er vist i figur 19.5. På overfladen  $a_2$  er



Figur 19.5

arealelementets størrelse

$$da = \lambda ds dp \quad (19.30)$$

hvor  $p$  måles langs omkredsen og længdeforholdet

$$\lambda = \lambda(\bar{r}, \bar{\eta}) \quad (19.31)$$

er en faktor, som afhænger af stedvektoren  $\bar{r}$  til referencekurven og den lokale stedvektor  $\bar{\eta}$ . Tilsvarende bliver volumenelementet

$$dv = \lambda ds da \quad (19.32)$$

hvor  $da$  er arealelementet på tværsnittet  $a_1$ .

Indsættes (19.30) og (19.32) i kraftligningen (13.1) på formen

$$\int_{a_1} \bar{\sigma} da + \int_{a_2} \bar{\sigma} da + \int_v \rho \bar{b} dv = \int_v \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) dv \quad (19.33)$$

fås

$$\int_{a_{1A}} \bar{\sigma} da + \int_{a_{1B}} \bar{\sigma} da + \int_A^B ds \left( \oint_p \lambda \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \rho \bar{b} da \right) = \int_A^B ds \int_{a_1} \lambda \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \quad (19.34)$$

Snitkraften  $\bar{F}$  defineres som spændingsresultanten

$$\bar{F}(s) = \int_{a_1} \bar{\sigma} da \quad (19.35)$$

$\bar{F}$  virker på tværsnit med  $\hat{t}$  som udadgående normal, på tværsnit med  $\hat{t}$  som indadgående normal virker  $-\bar{F}$ . Kraftlastvektoren pr. længdeenhed  $\bar{q}$  defineres som

$$\bar{q}(s) = \oint_p \lambda \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \rho \bar{b} da \quad (19.36)$$

Inertikraften pr. længdeenhed  $\mu \bar{A}$  defineres ved

$$\mu \bar{A}(s) = \int_{a_1} \lambda \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \quad (19.37)$$

hvor  $\mu = \int_{a_1} \lambda \rho da$  er massen pr. længdeenhed. Hermed kan (19.34) skrives

$$-\bar{F}_A + \bar{F}_B + \int_A^B \bar{q} ds = \int_A^B \mu \bar{A} ds \quad (19.38)$$

Idet man bemærker, at

$$\bar{F}_B - \bar{F}_A = \int_A^B d\bar{F} = \int_A^B ds (d\bar{F}/ds) \quad (10.39)$$

har man

$$\int_A^B ds (d\bar{F}/ds + \bar{q} - \mu \bar{A}) = 0 \quad (19.40)$$

og bevægelsesligningen bliver

$$d\bar{F}/ds + \bar{q} = \mu \bar{A} \quad (19.41)$$

Herefter indsættes (19.30) og (19.32) i momentligningen (13.2) på formen

$$\int_{a_1} (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \bar{\sigma} da + \int_{a_2} (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \bar{\sigma} da + \int_v (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \rho \bar{b} dv = \int_v (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) dv \quad (19.42)$$

som først bliver

$$\begin{aligned} & \int_{a_{1A}} (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \bar{\sigma} da + \int_{a_{1B}} (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \bar{\sigma} da + \int_A^B ds \left( \oint_p \lambda (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \rho \bar{b} da \right) = \\ & = \int_A^B ds \int_{a_1} \lambda (\bar{r} + \bar{\eta}) \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \end{aligned} \quad (19.43)$$

og derefter

$$\begin{aligned} & -\bar{r}_A \times \bar{F}_A + \int_{a_{1A}} \bar{\eta} \times \bar{\sigma} da + \bar{r}_B \times \bar{F}_B + \int_{a_{1B}} \bar{\eta} \times \bar{\sigma} da \\ & + \int_A^B ds \left( \bar{r} \times \bar{q} + \oint_p \lambda \bar{\eta} \times \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho \bar{b} da \right) = \\ & = \int_A^B ds \left( \bar{r} \times \mu \bar{A} + \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \right) \end{aligned} \quad (19.44)$$

Med

$$\begin{aligned} \bar{r}_B \times \bar{F}_B - \bar{r}_A \times \bar{F}_A &= \int_A^B d(\bar{r} \times \bar{F}) = \int_A^B (d\bar{r} \times \bar{F} + \bar{r} \times d\bar{F}) \\ &= \int_A^B ds (\dot{\bar{r}} \times \bar{F} + \bar{r} \times d\bar{F}/ds) \end{aligned} \quad (19.45)$$

og  $\bar{r} \times d\bar{F}/ds + \bar{r} \times \bar{q} = \bar{r} \times \mu \bar{A}$  som fås af (19.41), har man

$$\begin{aligned} & \int_{a_{1A}} \bar{\eta} \times \bar{\sigma} da + \int_{a_{1B}} \bar{\eta} \times \bar{\sigma} da + \int_A^B ds \left( \dot{\bar{r}} \times \bar{F} + \oint_p \lambda \bar{\eta} \times \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho \bar{b} da \right) \\ & = \int_A^B ds \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \end{aligned} \quad (19.46)$$

Nu indføres snitmomentet  $\bar{M}$  ved

$$\bar{M} = \int_{a_1} \bar{\eta} \times \bar{\sigma} da \quad (19.47)$$

momentlastvektoren pr. længdeenhed  $\bar{m}$  ved

$$\bar{m} = \oint_p \lambda \bar{\eta} \times \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho \bar{b} da \quad (19.48)$$



samt momentet af inertikraften pr. længdeenhed  $\mu\bar{B}$  ved

$$\mu\bar{B} = \int_{a_1} \lambda\bar{\eta} \times \rho(\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \quad (19.49)$$

og momentligningen bliver

$$-\bar{M}_A + \bar{M}_B + \int_A^B ds(\bar{t} \times \bar{F} + \bar{m}) = \int_A^B \mu\bar{B} ds \quad (19.50)$$

som fører til

$$d\bar{M}/ds + \bar{t} \times \bar{F} + \bar{m} = \mu\bar{B} \quad (19.51)$$

Udtrykket (16.5) for de ydre kræfters effekt på formen

$$P_y = \int_{a_1} \bar{\sigma} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) da + \int_{a_2} \bar{\sigma} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) da + \int_v \rho\bar{b} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) dv \quad (19.52)$$

bliver, efter indsættelse af (19.30), (19.32) og  $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$

$$\begin{aligned} P_y = & -\bar{F}_A \cdot \bar{v}_A + \bar{F}_B \cdot \bar{v}_B + \int_{a_{1A}} \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\eta}} da + \int_{a_{1B}} \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\eta}} da + \int_A^B ds \bar{v} \cdot \bar{q} \\ & + \int_A^B ds \left( \oint_p \lambda \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\eta}} dp + \int_{a_1} \lambda \rho \bar{b} \cdot \dot{\bar{\eta}} da \right) \end{aligned} \quad (19.53)$$

Tilsvarende bliver den kinetiske energi

$$K = \frac{1}{2} \int_v \rho(\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) dv \quad (19.54)$$

og den materielle tidsafledede  $\dot{K} = DK/Dt$

$$\begin{aligned} \dot{K} = & \int_v \rho(\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) dv = \int_A^B ds \int_{a_1} \lambda \rho(\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\eta}}) \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \\ = & \int_A^B ds \left( \bar{v} \cdot \mu\bar{A} + \int_{a_1} \lambda \rho \dot{\bar{\eta}} \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \right) \end{aligned} \quad (19.55)$$

En vektor  $\bar{\omega}$  defineres ved de tre skalære produkter

$$\begin{aligned} \bar{M} \cdot \bar{\omega} &= \int_{a_1} \dot{\bar{\eta}} \cdot \bar{\sigma} da \\ \bar{m} \cdot \bar{\omega} &= \int_p \lambda \dot{\bar{\eta}} \cdot \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \dot{\bar{\eta}} \cdot \rho \bar{b} da \\ \mu\bar{B} \cdot \bar{\omega} &= \int_{a_1} \lambda \rho \dot{\bar{\eta}} \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \end{aligned} \quad (19.56)$$

hvorefter man har

$$P_y = -\bar{F}_A \cdot \bar{v}_A + \bar{F}_B \cdot \bar{v}_B - \bar{M}_A \cdot \bar{\omega}_A + \bar{M}_B \cdot \bar{\omega}_B + \int_A^B ds (\bar{q} \cdot \bar{v} + \bar{m} \cdot \bar{\omega}) \quad (19.57)$$

$$\dot{K} = \int_A^B ds (\bar{v} \cdot \mu \bar{A} + \bar{\omega} \cdot \mu \bar{B}) \quad (19.58)$$

Udtrykket for de ydre kræfters effekt kan nu skrives

$$\begin{aligned} P_y &= [\bar{F} \cdot \bar{v} + \bar{M} \cdot \bar{\omega}]_A^B + \int_A^B ds (\bar{q} \cdot \bar{v} + \bar{m} \cdot \bar{\omega}) = \\ &= \int_A^B ds \left( d(\bar{F} \cdot \bar{v})/ds + d(\bar{M} \cdot \bar{\omega})/ds + \bar{q} \cdot \bar{v} + \bar{m} \cdot \bar{\omega} \right) \\ &= \int_A^B ds \left( \bar{v} \cdot d\bar{F}/ds + \bar{F} \cdot d\bar{v}/ds + \bar{\omega} \cdot d\bar{M}/ds + \bar{M} \cdot d\bar{\omega}/ds + \bar{q} \cdot \bar{v} + \bar{m} \cdot \bar{\omega} \right) \end{aligned} \quad (19.59)$$

som ved hjælp af bevægelsesligningerne (19.41) og (19.51) bliver

$$\begin{aligned} P_y &= \int_A^B ds (\bar{v} \cdot \mu \bar{A} + \bar{\omega} \cdot \mu \bar{B} - \hat{t} \times \bar{F} \cdot \bar{\omega} + \bar{F} \cdot d\bar{v}/ds + \bar{M} \cdot d\bar{\omega}/ds) \\ &= \dot{K} + \int_A^B ds (\bar{F} \cdot d\bar{v}/ds - \hat{t} \times \bar{F} \cdot \bar{\omega} + \bar{M} \cdot d\bar{\omega}/ds) \end{aligned} \quad (19.60)$$

Hermed defineres effekten  $P_i$  af de indre kræfter  $\bar{F}$  og  $\bar{M}$  ved

$$\begin{aligned} P_i &= \int_A^B ds (\bar{F} \cdot d\bar{v}/ds - \hat{t} \times \bar{F} \cdot \bar{\omega} + \bar{M} \cdot d\bar{\omega}/ds) \\ &= \int_A^B ds \left( \bar{F} \cdot (d\bar{v}/ds + \hat{t} \times \bar{\omega}) + \bar{M} \cdot d\bar{\omega}/ds \right) \end{aligned} \quad (19.61)$$

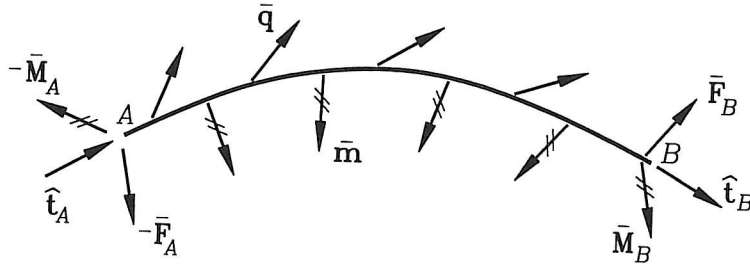
så effektligningen bliver

$$P_y = \dot{K} + P_i \quad (19.62)$$

I udtrykket (16.6) for de indre kræfters effekt i 3 dimensioner forekommer tøjnings-hastighedstensoren  $\underline{d}$ . Denne tensor er bestemt ved hastighedsgradienten  $\underline{l} = \text{grad } \bar{v}$  som  $\underline{d} = \frac{1}{2}(\underline{l} + \underline{l}^T)$ , hvilket indebærer, at alle kinematiske størrelser er bestemt ved hastighedsvektoren  $\bar{v}$ . I modsætning hertil er vektoren  $\bar{\omega}$ , som optræder i udtrykkene for såvel  $P_y, \dot{K}$  som  $P_i$  i den endimensionale beskrivelse på ingen måde bestemt ved

hastighedsvektoren  $\bar{v}(s)$  og, som det fremgår af definitionsligningerne (19.56), for så vidt heller ikke ved den lokale hastighedsvektor  $\dot{\bar{\eta}}$  alene.  $\bar{\omega}$  er således ikke nogen rent kinematisk størrelse.

Figur 19.6 viser et bjælkestykke med påført last  $\bar{q}$  og  $\bar{m}$  pr. længdeenhed samt snit-



Figur 19.6

kræfter  $\bar{F}$  og  $\bar{M}$  i endepunkterne A og B. De forskellige definitioner er anført i tabel 19.1, mens bevægelsesligninger og effektligning er anført i tabel 19.2.

$$\begin{aligned}
 \bar{F} &= \int_{a_1} \bar{\sigma} da \\
 \bar{q} &= \oint_p \lambda \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \rho \bar{b} da \\
 \mu \bar{A} &= \int_{a_1} \lambda \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \\
 \bar{M} &= \int_{a_1} \bar{\eta} \times \bar{\sigma} da \\
 \bar{m} &= \oint_p \lambda \bar{\eta} \times \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho \bar{b} da \\
 \mu \bar{B} &= \int_{a_1} \lambda \bar{\eta} \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da \\
 \bar{M} \cdot \bar{\omega} &= \int_{a_1} \dot{\bar{\eta}} \cdot \bar{\sigma} da \\
 \bar{m} \cdot \bar{\omega} &= \oint_p \lambda \dot{\bar{\eta}} \cdot \bar{\sigma} dp + \int_{a_1} \lambda \dot{\bar{\eta}} \cdot \rho \bar{b} da \\
 \mu \bar{B} \cdot \bar{\omega} &= \int_{a_1} \lambda \dot{\bar{\eta}} \cdot \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\eta}}) da
 \end{aligned}$$

Tabel 19.1

$$d\bar{F}/ds + \bar{q} = \mu\bar{A}$$

$$d\bar{M}/ds + \hat{t} \times \bar{F} + \bar{m} = \mu\bar{B}$$

$$P_y = \dot{K} + P_i$$

$$P_y = \left[ \bar{F} \cdot \bar{v} + \bar{M} \cdot \bar{\omega} \right]_A^B + \int_A^B ds (\bar{q} \cdot \bar{v} + \bar{m} \cdot \bar{\omega})$$

$$\dot{K} = \int_A^B ds (\mu\bar{A} \cdot \bar{v} + \mu\bar{B} \cdot \bar{\omega})$$

$$P_i = \int_A^B ds \left( \bar{F} \cdot (d\bar{v}/ds + \hat{t} \times \bar{\omega}) + \bar{M} \cdot d\bar{\omega}/ds \right)$$

Tabel 19.2

### 19.3 Bjælke deformationer

En kurve er i en referencetilstand givet ved

$$\bar{R} = \bar{R}(u) \quad (19.63)$$

Buelængde, tangent, krumning og torsion betegnes med henholdsvis  $S, \bar{T}, K$  og  $T$ . Den deformerede kurve bestemmes ved

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{R}, \alpha) \quad (19.64)$$

hvor  $\alpha$  er evolutionsparameteren, så  $\bar{r}(\bar{R}, 0) = \bar{R}$ . Af

$$d\bar{r} = d\bar{R} \cdot \text{Grad } \bar{r} = \tilde{F} \cdot d\bar{R} \quad (19.65)$$

fås deformationsgradienten  $\tilde{F}$  ved

$$\tilde{F}^T = \text{Grad } \bar{r} \quad (19.66)$$

og med

$$d\bar{r} = d\hat{s}\hat{t} \quad , \quad d\bar{R} = dS\hat{T} \quad (19.67)$$

bliver strækket  $\Lambda = ds/dS$  bestemt ved

$$\Lambda^2 = \hat{T} \cdot \tilde{C} \cdot \hat{T} \quad (19.68)$$



hvor

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \quad (19.69)$$

er Cauchy's deformationstensor.

Hermed er enhedstangenten  $\hat{t}$

$$\hat{t} = \underline{\underline{F}} \cdot \hat{T} / \Lambda \quad (19.70)$$

og krumningsvektoren  $\kappa \hat{n}$  bestemmes ved

$$\kappa \hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{dS}{ds} \frac{d\bar{R}}{ds} \cdot \text{Grad } \hat{t} = \hat{T} \cdot \text{Grad } \hat{t} / \Lambda \quad (19.71)$$

Binormalen  $\hat{b}$  bestemmes ved

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (19.72)$$

og torsionen  $\tau$  ved

$$-\tau \hat{n} = \frac{d\hat{b}}{ds} = \hat{T} \cdot \text{Grad } \hat{b} / \Lambda \quad (19.73)$$

Da  $\bar{r} = \bar{r}(\bar{R}, \alpha)$  fører en kurve  $\bar{R} = \bar{R}(u)$  over i kurver svarende til forskellige værdier af  $\alpha$ , indeholder deformationsgradienten  $\underline{\underline{F}}$  kun oplysninger om tangenter  $\bar{T}$ , som føres over i tangenter  $\hat{t}$ . I henhold til (19.70) kan man derfor skrive

$$\underline{\underline{F}} = \Lambda \hat{t} \hat{T} \quad (19.74)$$

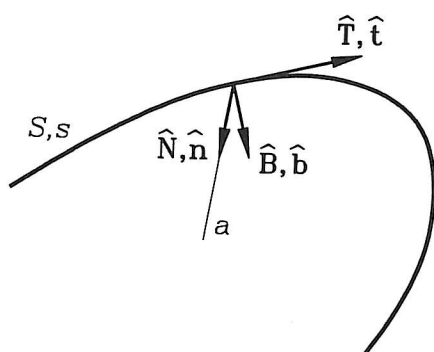
som er en lineær tensor. Deformationstensoren  $\underline{\underline{C}}$  kan herefter udtrykkes som

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \Lambda^2 \hat{T} \hat{T} \quad (19.75)$$

og indeholder kun oplysning om længdeændringer i tangentreningen.

Om deformationen af hovednormalen  $\hat{N}$  og binormalen  $\hat{B}$  indeholder  $\underline{\underline{F}}$  ingen oplysninger, selvom såvel  $\kappa$  som  $\tau$ ,  $\hat{n}$  og  $\hat{b}$  kan bestemmes ud fra kendskabet til deformationsgradienten  $\underline{\underline{F}}$ .

Som et eksempel på, at der kan ske deformationer af  $\hat{N}$  og  $\hat{B}$ , som ikke fremgår af den endimensionale beskrivelse, betragtes en bjælke, som repræsenteres af en kurve i form



Figur 19.7

af en halvcirkel med radius  $a$ , se figur 19.7. Deformationen  $\bar{r} = \bar{r}(\bar{R}, \alpha)$  forudsættes at være

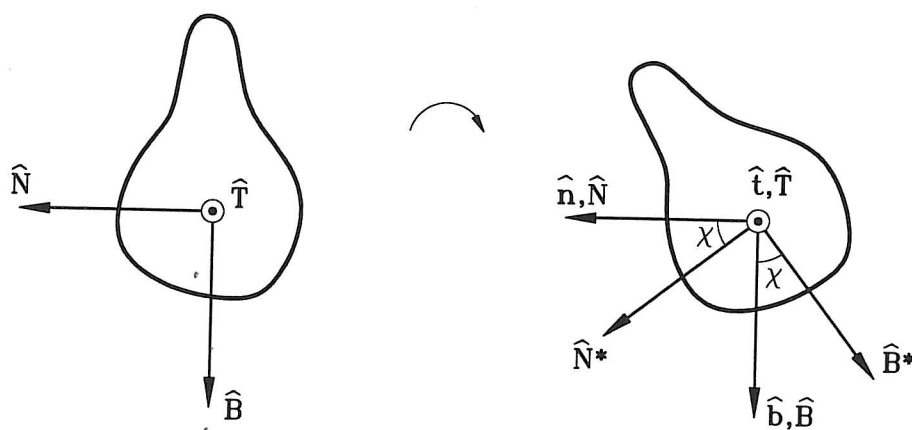
$$\bar{r} = \bar{R} \quad (19.76)$$

hvilket medfører

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \hat{T} \\ \hat{n} &= \hat{N} \\ \hat{b} &= \hat{B} \end{aligned} \quad (19.77)$$

Dermed er imidlertid ikke sagt, at  $\hat{N}$  og  $\hat{B}$  føres over i  $\hat{n}$  og  $\hat{b}$ . Man kan udmærket forestille sig, at hvert enkelt tværsnit vrides en vinkel  $\chi(s)$ , som vist i figur 19.8. Betegner  $\hat{N}^*$  og  $\hat{B}^*$  de vektorer, som  $\hat{N}$  og  $\hat{B}$  føres over i, har man

$$\begin{bmatrix} \hat{T}^* = \hat{t} \\ \hat{N}^* \\ \hat{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi & \sin \chi \\ 0 & -\sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{bmatrix} \quad (19.78)$$



Figur 19.8

Deformationen vridning kan således angives ved rotationstensoren

$$\underline{\chi} = \hat{T}\hat{T} + (\underline{I} - \hat{T}\hat{T}) \cos \chi + \underline{I} \times \hat{T} \sin \chi \quad (19.79)$$

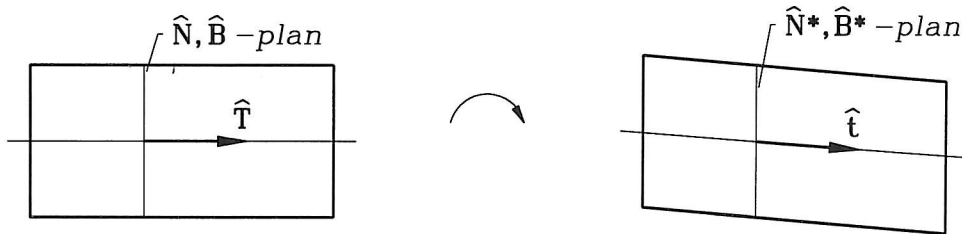
så

$$\hat{V}^* = \underline{\chi} \cdot \hat{V} \quad (19.80)$$

dvs.  $\hat{V}$  føres over i  $\hat{V}^*$ . Til rotationstensoren  $\underline{\chi}$  knyttes, som vist i afsnit 8.2.2, rotationsændringsvektoren

$$\bar{\omega} = \hat{T} d\underline{\chi} / dt \quad (19.81)$$

Man kan også forestille sig deformationer, som fører  $\hat{N}, \hat{B}$ -planen over i en  $\hat{N}^*, \hat{B}^*$ -plan, som ikke står vinkelret på tangenten  $\hat{t}$ , se figur 19.9.



Figur 19.9

Forudsættes det, at  $\hat{N}^*$  og  $\hat{B}^*$  er ortogonale, kan også denne deformation beskrives ved  $\bar{r} = \bar{r}(\bar{R}, \alpha)$  samt en rotation, men i dette eksempel sker drejningen ikke om tangenten  $\hat{t}$ .

Hvis derimod  $\bar{N}^*$  og  $\bar{B}^*$  ikke er ortogonale og måske ikke engang enhedsvektorer, da kan tværsnittets deformation ikke beskrives ved en rotation, lige så lidt som f.eks. hvælvning af tværsnittene kan beskrives af en rotationstensor.

Betragtes nu vektoren  $\bar{\omega}$  defineret ved (19.56), ses det, at man ved at identificere  $\bar{\omega}$  med en vinkelhastighedsvektor, dvs.

$$\bar{\omega} = \hat{a} d\underline{\chi} / dt \quad (19.82)$$

får bestemt en omdrejningsakse  $\hat{a}$  og en vinkelhastighed  $d\underline{\chi} / dt$ .

Man kan altså tolke  $\bar{\omega}$  som en vinkelhastighedsvektor, der beskriver en stiv drejning af et tværsnit, uanset hvordan tværsnittet deformeres i den tredimensionale model. At

tolke  $\bar{\omega}$  som en vinkelhastighedsvektor kan derfor være det samme som at opfatte den tredimensionale bjælke som en bjælke, der er pålagt den indre binding, at tværsnit skal bevæge sig som stive legemer. Til indre deformationsbindinger hører der, som vist i afsnit 17 ubestemte spændinger, hvilket har betydning for de konstitutive ligninger, som det også er nævnt i afsnit 17.

Hvis man vil beskæftige sig med endimensionale konstruktionselementer, er man imidlertid nødt til at definere  $\bar{\omega}$  som en kinematisk størrelse, medmindre man vil nøjes med at betragte konstruktionselementer, i hvilke der ikke optræder momenter, og kraften er parallel med tangenten, dvs.  $\bar{M} = \bar{0}$ ,  $\bar{m} = \bar{0}$ ,  $\mu\bar{B} = \bar{0}$  samt  $\bar{F} = F\hat{t}$ . Af effektudtrykkene fremgår da, at  $\bar{\omega}$  ikke har nogen betydning. Kun i dette tilfælde kan man opstille en eksakt endimensional teori, hvor  $\bar{F}$  kun afhænger af strækket  $\Lambda$ . I de tilfælde hvor der kan optræde momenter, må  $\bar{\omega}$  defineres som en kinematisk størrelse, og den teori, der opstilles, bliver tilnærmet. Uanset hvordan man tolker  $\bar{\omega}$  i forhold til den tredimensionale teori, kan der også optræde bindinger med tilhørende reaktionskræfter i den endimensionale teori. Antages f.eks. ustrækkelighed, dvs.  $\Lambda = 1$ , bliver komponenten af  $\bar{F}$  i tangentretningen ubestemt, og antages  $\bar{\omega}$  parallel med  $\hat{t}$ , bliver komponenten af  $\bar{F}$  vinkelret på  $\hat{t}$  ubestemt.



## 20. FRA 3 DIMENSIONER TIL 2

En todimensional beskrivelse af tredimensionale fænomener fremkommer ved at indføre størrelser, som alene er funktioner af en stedvektor, som beskriver en flade i rummet og de geometriske størrelser, som beskriver denne referenceflade.

### 20.1 Flader

Er stedvektoren  $\bar{r}$  en funktion af to skalære parametre  $u$  og  $v$ , beskriver

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (20.1)$$

en flade i rummet. I ethvert punkt på fladen bestemmer de afledede

$$\begin{aligned} \bar{a}_u &= \bar{r}'_u = \partial \bar{r} / \partial u \\ \bar{a}_v &= \bar{r}'_v = \partial \bar{r} / \partial v \end{aligned} \quad (20.2)$$

fladens tangentplan, og normalen til fladen  $\bar{n}$  bestemmes som

$$\bar{n} = \bar{a}_u \times \bar{a}_v = n \hat{n} \quad (20.3)$$

Man bemærker, at enhedsnormalen  $\hat{n}$  er en funktion af stedvektoren  $\bar{r}$ , men ikke specielt af de skalære parametre  $u$  og  $v$ . Har man nemlig  $\bar{r}$  som funktion af parameterparret  $u_1$  og  $v_1$  og et andet par  $u_2$  og  $v_2$  givet som funktioner af  $u_1$  og  $v_1$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_2(u_1, v_1) \\ v_2 &= v_2(u_1, v_1) \end{aligned} \quad (20.4)$$

da vil

$$\bar{r} = \bar{r}(u_1, v_1) = \bar{r}(u_2, v_2) \quad (20.5)$$

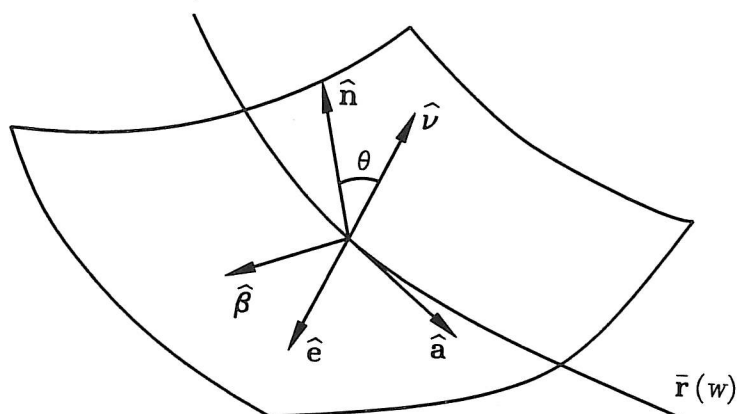
bestemme samme tangentplan og dermed samme enhedsnormal  $\hat{n}(\bar{r})$  i ethvert punkt på fladen.

#### 20.1.1 Kurver på flader

Ligesom en kurve i rummet er karakteriseret ved sin krumning  $\kappa$  og torsionen  $\tau$ , er en flade i rummet karakteriseret ved sin normalkrumning  $k$ , den geodætiske krumning  $g$  og den geodætiske torsion  $t$ , hørende til en tangentretning på fladen, se (20.11).

Hvis begge parametre  $u$  og  $v$  er funktioner af samme skalære parameter  $w$ , beskriver

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{r}(w) \quad (20.6)$$



Figur 20.1

en kurve på fladen. Kurvetangenten  $\hat{a} = d\bar{r}/ds$  ligger i fladens tangentplan, men kurvens hovednormal, som her betegnes  $\hat{\nu}$ , falder ikke sammen med fladenormalen  $\hat{n}$ . Vinklen mellem  $\nu$  og  $\hat{n}$  betegnes  $\theta$ , se figur 20.1. Kurvens binormal  $\hat{\beta} = \hat{a} \times \hat{\nu}$  ligger ikke i fladens tangentplan, hvilket derimod enhedsvektoren

$$\hat{e} = \hat{a} \times \hat{n} \quad (20.7)$$

gør. Mellem de to sæt lineært uafhængige vektorer  $\hat{a}, \hat{n}, \hat{e}$  og  $\hat{a}, \hat{\nu}, \hat{\beta}$  gælder

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{n} \\ \hat{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\nu} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \quad (20.8)$$

og

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\nu} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{n} \\ \hat{e} \end{bmatrix} \quad (20.9)$$

hvor  $\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{\nu} (= \hat{\beta} \cdot \hat{e})$ .

Heraf fås sammen med Frenet's ligninger

$$\begin{aligned}
d\hat{a}/ds &= \kappa \hat{v} = \kappa \cos \theta \hat{n} - \kappa \sin \theta \hat{e} \\
d\hat{n}/ds &= \cos \theta d\hat{v}/ds + \sin \theta d\hat{\beta}/ds - (\sin \theta \hat{v} - \cos \theta \hat{\beta}) d\theta/ds \\
&= \cos \theta (-\kappa \hat{a} \cdot \tau \hat{\beta}) - \sin \theta \tau \hat{v} + \hat{e} d\theta/ds \\
&= -\kappa \cos \theta \hat{a} + \tau \cos \theta (\sin \theta \hat{n} + \cos \theta \hat{e}) - \tau \sin \theta (\cos \theta \hat{n} - \sin \theta \hat{e}) + \hat{e} d\theta/ds \\
&= -\kappa \cos \theta \hat{a} + (\tau + d\theta/ds) \hat{e} \\
d\hat{e}/ds &= -\sin \theta d\hat{v}/ds + \cos \theta d\hat{\beta}/ds - (\cos \theta \hat{v} + \sin \theta \hat{\beta}) d\theta/ds \\
&= \sin \theta (\kappa \hat{a} - \tau \hat{\beta}) - \cos \theta \tau \hat{v} - \hat{n} d\theta/ds \\
&= \kappa \sin \theta \hat{a} - \tau \sin \theta (\sin \theta \hat{n} + \cos \theta \hat{e}) - \tau \cos \theta (\cos \theta \hat{n} - \sin \theta \hat{e}) - \hat{n} d\theta/ds \\
&= \kappa \sin \theta \hat{a} - (\tau + d\theta/ds) \hat{n}
\end{aligned} \tag{20.10}$$

hvor  $\kappa$  og  $\tau$  er rumkurvens krumning og torsion.

Med *normalkrumningen*  $k$ , *den geodætiske krumning*  $g$  og *den geodætiske torsion*  $t$  hørende til tangenten  $\hat{a}$  og givet ved

$$\begin{aligned}
k &= \kappa \cos \theta \\
g &= \kappa \sin \theta \\
t &= \tau + d\theta/ds
\end{aligned} \tag{20.11}$$

bliver

$$\begin{bmatrix} d\hat{a}/ds \\ d\hat{n}/ds \\ d\hat{e}/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & -g \\ -k & 0 & t \\ g & -t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{n} \\ \hat{e} \end{bmatrix} \tag{20.12}$$

som også kan skrives

$$\begin{aligned}
d\hat{a}/ds &= \bar{u} \times \hat{a} \\
d\hat{n}/ds &= \bar{u} \times \hat{n} \\
d\hat{e}/ds &= \bar{u} \times \hat{e}
\end{aligned} \tag{20.13}$$

hvor

$$\bar{u} = t\hat{a} + g\hat{n} + k\hat{e} \tag{20.14}$$

svarer til Darboux vektoren for rumkurver. Den til Darboux tensoren svarende tensor bliver følgende

$$\bar{\bar{U}} = \bar{I} \times \bar{u} = k(\hat{n}\hat{a} - \hat{a}\hat{n}) + g(\hat{a}\hat{e} - \hat{e}\hat{a}) + t(\hat{e}\hat{n} - \hat{n}\hat{e}) \tag{20.15}$$

Af (20.11.a), Meusnier's sætning

$$k = \kappa \cos \theta \quad (20.16)$$

fremgår, at fladens normalkrumning hørende til retningen  $\hat{a}$  er krumningen af skæringskurven mellem fladen og den plan, der udspændes af tangenten  $\hat{a}$  og fladenormalen  $\hat{n}$  i det betragtede punkt. Mens en rumkurves krumning altid er positiv, afhænger fortegnet af fladens normalkrumning af fladenormalens retning i forhold til kurvens hovednormal.

De omvendte relationer til (20.11) er

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{k^2 + g^2} \\ \tau &= t - d\theta/ds \\ \tan \theta &= g/k \end{aligned} \quad (20.17)$$

Af  $\tan \theta = g/k$  fås

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{kdg/ds - gdk/ds}{k^2} \quad (20.18)$$

som med

$$\cos^2 \theta = \frac{k^2}{k^2 + g^2} \quad (20.19)$$

giver

$$\tau = t - \frac{kdg/ds - gdk/ds}{k^2 + g^2} \quad (20.20)$$

### 20.1.2 Fladers fundamentaltensorer

For de to parametre  $u$  og  $v$  indføres nu betegnelserne  $u^1$  og  $u^2$ , og fladens ligning bliver

$$\bar{r} = \bar{r}(u^\gamma), \quad \gamma = 1, 2 \quad (20.21)$$

tangenterne skrives

$$\bar{a}_\gamma = \bar{r}'_\gamma = \partial \bar{r} / \partial u^\gamma \quad (20.22)$$

og normalen

$$\bar{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = n\hat{n} \quad (20.23)$$



Indføres de reciproke vektorer  $\bar{a}^\gamma$  så

$$\bar{a}^\gamma \cdot \bar{a}_\beta = \delta_\beta^\gamma \quad (20.24)$$

kan identitetstensoren  $\bar{\bar{I}}$  skrives

$$\bar{\bar{I}} = \bar{a}^\gamma \bar{a}_\gamma + \hat{n} \hat{n} \quad (20.25)$$

Da differentialet  $d\bar{r}$  ligger i fladens tangentplan, bliver gradienten af stedvektoren

$$\nabla \bar{r} = \bar{a}^\gamma \bar{a}_\gamma \quad (20.26)$$

For denne tensor indføres betegnelsen  $\bar{\bar{a}}$ , og man har

$$\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{I}} - \hat{n} \hat{n} = -\hat{n} \times \bar{\bar{I}} \times \hat{n} = \nabla \bar{r} \quad (20.27)$$

Som nævnt i begyndelsen af dette afsnit, er normalen  $\hat{n}$  en funktion af stedvektoren  $\bar{r}$  og ikke specielt af  $u^\gamma$ . Dette gælder derfor også for tensoren  $\bar{\bar{a}}(\bar{r})$ , som kaldes *fladens første fundamentaltensor*. Ved hjælp af den bestemmes længder, vinkler og arealer på fladen, idet man har

$$\begin{aligned} d\bar{r}_1 \cdot d\bar{r}_2 &= \underline{a} : d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 \\ d\bar{r}_1 \times d\bar{r}_2 &= (\underline{a} \times d\bar{r}_1) \cdot d\bar{r}_2 \end{aligned} \quad (20.28)$$

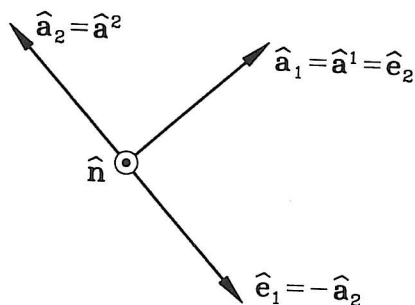
Det ses umiddelbart, at  $\underline{a}$  er selvtransponeret

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \underline{a}^T \\ \text{samt } \underline{a} \cdot \underline{a} &= \underline{a} \end{aligned} \quad (20.29)$$

*Fladens anden fundamentaltensor*  $\underline{b}$  indføres som gradienten af normalvektoren  $\hat{n}$ . Fra (20.12) har man den afledede af normalvektoren

$$d\hat{n}/ds^\gamma = -k_\gamma \hat{a}_\gamma + t_\gamma \hat{e}_\gamma \quad (20.30)$$

hvor  $s^\gamma, k_\gamma, t_\gamma$  og  $\hat{e}_\gamma$  er henholdsvis buelængden, normalkrumningen, den geodætiske torsion og enhedsvektoren  $\hat{e}_\gamma$  hørende til tangenten  $\hat{a}_\gamma$ . Benyttes som vist i figur 20.2,



Figur 20.2

et sæt ortogonale vektorer  $\hat{a}_1$  og  $\hat{a}_2$ , har man

$$\begin{aligned} d\hat{n}/ds^1 &= -k_1 \hat{a}_1 - t_1 \hat{a}_2 \\ d\hat{n}/ds^2 &= -k_2 \hat{a}_2 + t_2 \hat{a}_1 \end{aligned} \quad (20.31)$$

Heraf fås, sammen med  $\nabla \hat{n} = \bar{a}^\gamma \partial \hat{n} / \partial s^\gamma$

$$\nabla \hat{n} = -\hat{a}^1 (k_1 \hat{a}_1 + t_1 \hat{a}_2) - \hat{a}^2 (k_2 \hat{a}_2 - t_2 \hat{a}_1) \quad (20.32)$$

Med

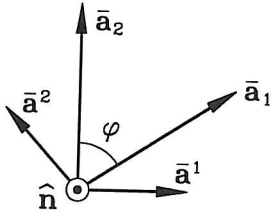
$$\begin{aligned} b_1^1 &= -k_1 \\ b_1^2 &= -t_1 \\ b_2^1 &= t_2 \\ b_2^2 &= -k_2 \end{aligned} \quad (20.33)$$

bliver

$$\nabla \hat{n} = b_\gamma^\beta \hat{a}^\gamma \hat{a}_\beta = \underline{\underline{b}} \quad (20.34)$$

hvor  $\underline{\underline{b}}$  som nævnt kaldes fladens anden fundamentaltensor. Denne tensor indeholder, som det fremgår af (20.33) oplysninger om fladens normalkrumning og geodætiske torsion.

Fladens anden fundamentaltensor  $\underline{\underline{b}}$  er selvtransponeret, idet  $\text{rot } \hat{n} = \underline{\underline{E}} : \text{grad } \hat{n}$ , som det skal vises, er nul. Med to vilkårlige tangenter  $\bar{a}_\gamma$  har man,



Figur 20.3

se figur 20.3

$$n\hat{n} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \quad (20.35)$$

og dermed

$$\begin{aligned} \bar{a}^1 &= \bar{a}_2 \times \hat{n} / n \\ \bar{a}^2 &= \hat{n} \times \bar{a}_1 / n \end{aligned} \quad (20.36)$$

Gradienten af  $\hat{n}$ ,  $\nabla\hat{n} = \bar{a}^\alpha \partial\hat{n}/\partial u^\alpha$  kan derfor skrives

$$n\nabla\hat{n} = \bar{a}_2 \times \hat{n} \partial\hat{n}/\partial u^1 + \hat{n} \times \bar{a}_1 \partial\hat{n}/\partial u^2 \quad (20.37)$$

og rot  $\hat{n}$  bliver bestemt ved

$$\begin{aligned} n \text{rot } \hat{n} &= (\bar{a}_2 \times \hat{n}) \times \partial\hat{n}/\partial u^1 + (\hat{n} \times \bar{a}_1) \times \partial\hat{n}/\partial u^2 \\ &= (\bar{a}_2 \cdot \partial\hat{n}/\partial u^1 - \bar{a}_1 \cdot \partial\hat{n}/\partial u^2) \hat{n} - (\hat{n} \cdot \partial\hat{n}/\partial u^1) \bar{a}_2 - (\hat{n} \cdot \partial\hat{n}/\partial u^2) \bar{a}_1 \end{aligned} \quad (20.38)$$

Af

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \quad (20.39)$$

fås

$$\hat{n} \cdot \partial\hat{n}/\partial u^1 = \hat{n} \cdot \partial\hat{n}/\partial u^2 = 0 \quad (20.40)$$

og af

$$\bar{a}_1 \cdot \hat{n} = \bar{a}_2 \cdot \hat{n} = 0, \quad \bar{a}_\gamma = \partial\bar{r}/\partial u^\gamma \quad (20.41)$$

fås

$$\hat{n} \cdot \partial^2 \bar{r} / \partial u^1 \partial u^2 = -\bar{a}_1 \cdot \partial\hat{n}/\partial u^2 = -\bar{a}_2 \cdot \partial\hat{n}/\partial u^1 \quad (20.42)$$

Hermed er  $\text{rot } \hat{n} = 0$  og  $\text{grad } \hat{n} = \underline{\underline{b}}$  er selvtransponeret, jævnfør (4.91) og bemærkningerne i afsnit 8.3.1a.

I (20.31) – (20.33) har man således

$$t_1 = -t_2 = t \quad (20.43)$$

og man kan skrive

$$\underline{\underline{b}} = \nabla \hat{n} = - \left( k_1 \hat{a}^1 \hat{a}_1 + t (\hat{a}^1 \hat{a}_2 + \hat{a}^2 \hat{a}_1) + k_2 \hat{a}^2 \hat{a}_2 \right) \quad (20.44)$$

På normalform har man i ethvert punkt

$$\underline{\underline{b}} = b_1 \hat{i}^1 \hat{i}_1 + b_2 \hat{i}^2 \hat{i}_2 \quad (20.45)$$

hvor  $b_\gamma$  er hovedkrumningerne. Kurver langs hvilke torsionen er nul er ortogonale og kaldes krumningslinier. Tilsvarende kaldes kurver langs hvilke den gedætiske krumning er nul for geodætiske linier og kurver langs hvilke normalkrumningen er nul kaldes asymptotiske linier. Afstanden mellem to punkter på en flade, målt på fladen, er kortest langs en geodætisk linie.

Fladens anden fundamentaltensor har invarianterne

$$\begin{aligned} I_b &= \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = b_1 + b_2 = k_1 + k_2 = \text{div } \hat{n} \\ II_b &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{b}} \times \underline{\underline{b}}) : \underline{\underline{I}} = b_1 b_2 = k_1 k_2 - t^2 \end{aligned} \quad (20.46)$$

hvor

$$\frac{1}{2} I_b \text{ kaldes middelkrumningen}$$

$$II_b \text{ kaldes den totale eller den Gauss'iske krumning}$$

Ligesom den første fundamentaltensor indgår i

$$d\bar{r} \cdot d\bar{r} = d\bar{r} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot d\bar{r} \quad (20.47)$$

finder man den anden fundamentaltensor i udtrykket

$$d\hat{n} \cdot d\bar{r} = d\bar{r} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot d\bar{r} \quad (20.48)$$

og tilsvarende har man

$$d\hat{n} \cdot d\hat{n} = d\bar{r} \cdot \underline{\underline{c}} \cdot d\bar{r} \quad (20.49)$$

hvor

$$\underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{b} = \underline{b}^2 \quad (20.50)$$

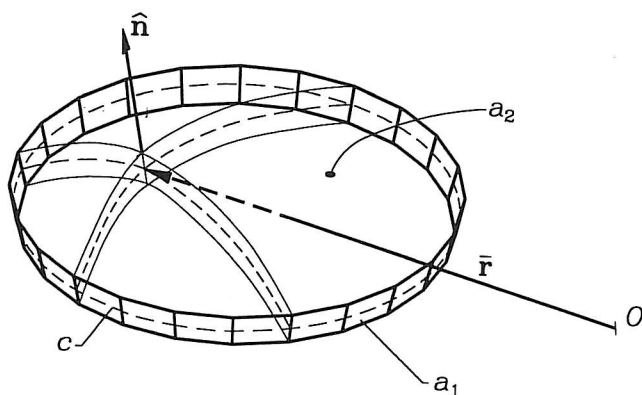
kaldes fladens tredie fundamentaltensor.

Hermed kan Cayley-Hamiltons ligning for  $\underline{b}$  skrives

$$\underline{c} - I_b \underline{b} + II_b \underline{a} = 0 \quad (20.51)$$

## 20.2 Bevægelsesligninger og effektligning for skaller

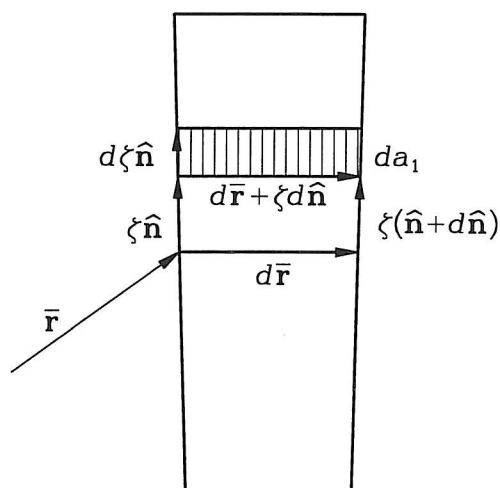
En del af et tredimensionalt konstruktionselement, der skal beskrives som todimensionalt, er vist i figur 20.4. Vektoren  $\bar{r}$  er stedvektor til den flade, hvortil der refereres.



Figur 20.4

Normalen til fladen betegnes  $\hat{n}$ . Elementet begrænses af fladerne  $a_1$  og  $a_2$ , hvor  $a_1$  indeholder normalerne til referencefladen langs dennes begrænsningskurve  $c$ . Stedvektoren til et vilkårligt punkt en vilkårlig normal betegnes  $\bar{r} + \bar{\zeta}$  hvor  $\bar{\zeta} = \zeta \hat{n}$ .

Et infinitesimalt arealelement på  $a_1$  er vist i figur 20.5. Elementet er afgrænset af to normaler  $\hat{n}$  og  $\hat{n} + d\hat{n}$  som afskærer stykket  $d\bar{r}$  på referencefladens begrænsningskurve.



Figur 20.5

Arealvektoren  $d\bar{a}_1$  bliver nu

$$d\bar{a}_1 = (d\bar{r} + \zeta d\hat{n}) \times d\zeta \hat{n} \quad (20.52)$$

som ved hjælp af (20.27) og (20.34) kan skrives

$$d\bar{a}_1 = d\bar{r} \cdot (\underline{a} + \zeta \underline{b}) \times \hat{n} d\zeta \quad (20.53)$$

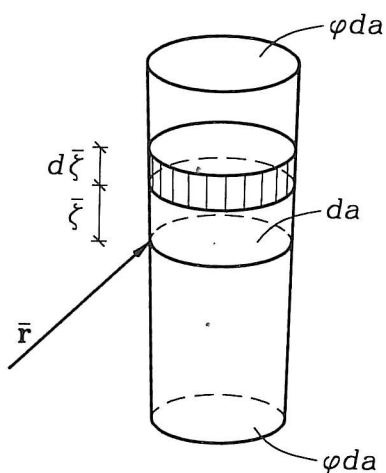
hvor  $\underline{a}$  og  $\underline{b}$  er fladens 1. og 2. fundamentaltensor.

Et andet infinitesimalt element, begrænset af normaler som afgrænser arealelementet  $da$  på referencefladen, er vist i figur 20.6. Arealelementet på overfladen  $a_2$  betegnes

$$da_2 = \varphi da \quad (20.54)$$

hvor arealforholdet er

$$\varphi = \varphi(\bar{r}, \bar{\zeta}) \quad (20.55)$$



Figur 20.6

og volumenelementet betegnes

$$dv = \varphi d\zeta da \quad (20.56)$$

Ved at indsætte disse geometriske relationer i kraftligningen (13.1)

$$\int_{a_1} \bar{\sigma} da + \int_{a_2} \bar{\sigma} da + \int_v \rho \bar{b} dv = \int_v \rho (\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\zeta}}) dv \quad (20.57)$$

og benytte  $\bar{\sigma} da = d\bar{a} \cdot \underline{\sigma}$ , fås

$$\begin{aligned} \oint_c d\vec{r} \cdot \int_h \left( (\underline{a} + \zeta \underline{b}) \times \hat{n} \right) \cdot \underline{\sigma} d\zeta + \int_a da \left( \varphi \bar{\sigma} + \int_h \varphi \rho \bar{b} d\zeta \right) = \\ = \int_a da \int_h \varphi \rho (\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\zeta}}) d\zeta \end{aligned} \quad (20.58)$$

hvor  $\int_h f d\zeta$  er integralet langs normalen  $\hat{n}$  gennem hele skaltykkelsen  $h$ .

Snitkrafttensoren pr. længdeenhed  $\underline{n}$  defineres ved

$$\underline{n} = \int_h \left( (\underline{a} + \zeta \underline{b}) \times \hat{n} \right) \cdot \underline{\sigma} d\zeta \quad (20.59)$$

kraftlastvektoren pr. arealenhed  $\bar{p}$  ved

$$\bar{p} = \varphi \bar{\sigma} + \int_h \varphi \rho \bar{b} d\zeta \quad (20.60)$$

og inertikraften pr. arealenhed  $l\bar{A}$

$$l\bar{A} = \int_h \varphi \rho (\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\zeta}}) d\zeta \quad (20.61)$$

hvor  $l = \int_h \varphi \rho d\zeta$  er massen pr. arealenhed.

Hermed bliver kraftligningen

$$\oint_c d\vec{r} \cdot \underline{n} + \int_a da \bar{p} = \int_a da l\bar{A} \quad (20.62)$$

I (20.62) er

$$\oint_c d\vec{r} \cdot \underline{n} = \oint_c ds \hat{t} \cdot \underline{n} = \oint_c ds \bar{n} \quad (20.63)$$



hvor  $\bar{n}$  er kraftvektoren pr. længdeenhed og kraftligningen bliver

$$\oint_c ds \bar{n} + \int_a da \bar{p} = \int_a da l \bar{A} \quad (20.64)$$

Ved anvendelse af Stokes' sætning (5.93) på (20.62) fås bevægelsesligningen

$$\int_a da (\hat{n} \cdot \text{rot } \bar{n} + \bar{p}) = \int_a da l \bar{A} \quad (20.65)$$

og følgelig

$$\hat{n} \cdot \text{rot } \bar{n} + \bar{p} = l \bar{A} \quad (20.66)$$

Af momentligningen (13.2)

$$\int_{a_1} (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \bar{\sigma} da + \int_{a_2} (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \bar{\sigma} da + \int_v (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \rho \bar{b} dv = \int_v (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) dv \quad (20.67)$$

fås

$$\begin{aligned} & - \oint_c d\bar{r} \cdot \int_h (\bar{a} + \zeta \bar{b}) \times \hat{n} \cdot \bar{\sigma} \times (\bar{r} + \bar{\zeta}) + \int_a da (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \varphi \bar{\sigma} \\ & + \int_a da \int_h \varphi (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \rho \bar{b} d\zeta = \int_a da \int_h \varphi (\bar{r} + \bar{\zeta}) \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) d\zeta \end{aligned} \quad (20.68)$$

og dermed

$$\begin{aligned} & - \oint_c d\bar{r} \cdot \bar{n} \times \bar{r} - \oint_c d\bar{r} \cdot \int_h (\bar{a} + \zeta \bar{b}) \times \hat{n} \cdot \bar{\sigma} \times \bar{\zeta} d\zeta \\ & + \int_a da \bar{a} \bar{r} \times \bar{p} + \int_a da \left( \bar{\zeta} \times \varphi \bar{\sigma} + \int_h \varphi \bar{\zeta} \times \rho \bar{b} d\zeta \right) = \\ & = \int_a da \bar{a} \bar{r} \times l \bar{A} + \int_a da \int_h \varphi \bar{\zeta} \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) d\zeta \end{aligned} \quad (20.69)$$

Med snitmomenttensoren pr. længdeenhed  $\bar{m}$  defineret ved

$$\bar{m} = - \int_h (\bar{a} + \zeta \bar{b}) \times \hat{n} \cdot \bar{\sigma} \times \bar{\zeta} d\zeta \quad (20.70)$$

momentlastvektoren pr. arealenhed  $\bar{\mu}$  ved

$$\bar{\mu} = \bar{\zeta} \times \varphi \bar{\sigma} + \int_h \varphi \bar{\zeta} \times \rho \bar{b} d\zeta \quad (20.71)$$

og momentet af inertikraften pr. arealenhed  $\overline{lB}$  ved

$$\overline{lB} = \int_h \varphi \bar{\zeta} \times \rho (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) d\zeta \quad (20.72)$$

bliver momentbevægelsesligningen

$$\begin{aligned} & - \oint_c d\bar{r} \cdot \underline{n} \times \bar{r} + \oint_c d\bar{r} \cdot \underline{m} + \int_a da (\bar{r} \times \bar{p} + \bar{\mu}) = \\ & = \int_a da (\bar{r} \times \overline{lA} + \overline{lB}) \end{aligned} \quad (20.73)$$

som fører til

$$\hat{n} \cdot \text{rot} (\underline{m} - \underline{n} \times \bar{r}) + \bar{r} \times \bar{p} + \bar{\mu} = \bar{r} \times \overline{lA} + \overline{lB} \quad (20.74)$$

I (20.73) er

$$\oint_c d\bar{r} \cdot \underline{m} = \oint_c ds \hat{t} \cdot \underline{m} = \oint_c ds \overline{m} \quad (20.75)$$

hvor  $\overline{m}$  er momentvektoren pr. længdeenhed og momentligningen (20.73) kan skrives

$$\oint_c ds \overline{m} + \oint_c ds \bar{r} \times \underline{n} + \int_a da (\bar{r} \times \bar{p} + \bar{\mu}) = \int_a da (\bar{r} \times \overline{lA} + \overline{lB}) \quad (20.76)$$

Man bemærker, at definitionen af momenttensoren  $\underline{m}$  medfører, at momentvektoren  $\overline{m}$  er vinkelret på  $\hat{n}$ , dvs. den ligger i tangentplanen.

Idet

$$\begin{aligned} \text{rot} (\underline{n} \times \bar{r}) &= \bar{a}^\gamma \times (\underline{n}'_\gamma \times \bar{r} + \underline{n} \times r'_\gamma) \\ &= \text{rot} \underline{n} \times \bar{r} + \bar{a}^\gamma \times \underline{n} \times \bar{a}_\gamma \\ &= \text{rot} \underline{n} \times \bar{r} - \underline{n} \times \bar{a}^\gamma \times \bar{a}_\gamma \end{aligned} \quad (20.77)$$

fås sammen med

$$-\hat{n} \cdot \text{rot} \underline{n} \times \bar{r} + \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times \overline{lA} \quad (20.78)$$

fra kraftbevægelsesligningen (20.66), at momentbevægelsesligningen bliver

$$\hat{n} \cdot \text{rot} \underline{m} + \hat{n} \cdot \underline{n} \times \bar{a}^\gamma \times \bar{a}_\gamma + \bar{u} = \overline{lB} \quad (20.79)$$

De ydre kræfters effekt  $P_y$  kan skrives

$$\begin{aligned}
 P_y &= \int_{a_1} \bar{\sigma} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) da + \int_{a_2} \bar{\sigma} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) da + \int_v \rho \bar{b} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) dv \\
 &= \oint_c d\bar{r} \cdot \int_h (\underline{a} + \zeta \underline{b}) \times \hat{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) d\zeta \\
 &\quad + \int_a da (\varphi \bar{\sigma} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) + \int_h \varphi \rho \bar{b} \cdot (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) d\zeta) \\
 &= \oint_c d\bar{r} \cdot \underline{n} \cdot \bar{v} + \oint_c d\bar{r} \cdot \int_h (\underline{a} + \zeta \underline{b}) \times \hat{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \dot{\bar{\zeta}} d\zeta \\
 &\quad + \int_a da (\bar{p} \cdot \bar{v} + \varphi \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\zeta}} + \int_h \varphi \rho \bar{b} \cdot \dot{\bar{\zeta}} d\zeta)
 \end{aligned} \tag{20.80}$$

Af den kinetiske energi  $K$  fås den afledede

$$\begin{aligned}
 \dot{K} &= \int_v \rho (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) dv \\
 &= \int_a da \int_h \varphi \rho (\dot{\bar{r}} + \dot{\bar{\zeta}}) \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) d\zeta \\
 &= \int_a da (\bar{v} \cdot l\bar{A} + \int_h \varphi \rho \dot{\bar{\zeta}} \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) d\zeta)
 \end{aligned} \tag{20.81}$$

En vektor  $\bar{\omega}$  defineres ved de tre skalære produkter

$$\begin{aligned}
 \underline{m} \cdot \bar{\omega} &= \int_h (\underline{a} + \zeta \underline{b}) \times \hat{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \dot{\bar{\zeta}} d\zeta \\
 \bar{\mu} \cdot \bar{\omega} &= \varphi \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\zeta}} + \int_h \varphi \rho \bar{b} \cdot \dot{\bar{\zeta}} d\zeta \\
 l\bar{B} \cdot \bar{\omega} &= \int_h \varphi \rho \dot{\bar{\zeta}} \cdot (\ddot{\bar{r}} + \ddot{\bar{\zeta}}) d\zeta
 \end{aligned} \tag{20.82}$$

hvorefter man har

$$\begin{aligned}
 P_y &= \oint_c d\bar{r} \cdot (\underline{n} \cdot \bar{v} + \underline{m} \cdot \bar{\omega}) + \int_a da (\bar{p} \cdot \bar{v} + \bar{\mu} \cdot \bar{\omega}) \\
 &= \oint_c ds (\bar{n} \cdot \bar{v} + \bar{m} \cdot \bar{\omega}) + \int_a da (\bar{p} \cdot \bar{v} + \bar{\mu} \cdot \bar{\omega}) \\
 \dot{K} &= \int_a da (\bar{v} \cdot l\bar{A} + \bar{\omega} \cdot l\bar{B})
 \end{aligned} \tag{20.83}$$

Udtrykket for de ydre kræfters effekt  $P_y$  omskrives

$$\begin{aligned}
 P_y &= \int_a da \left( \hat{n} \cdot \text{rot} (\underline{n} \cdot \bar{v} + \underline{m} \cdot \bar{\omega}) + \bar{p} \cdot \bar{v} + \bar{\mu} \cdot \bar{\omega} \right) \\
 &= \int_a da \left( \hat{n} \cdot \left( \text{rot} \underline{n} \cdot \bar{v} + \bar{a}^\gamma \times \underline{n} \cdot \bar{v}'_\gamma + \text{rot} \underline{m} \cdot \bar{\omega} + \bar{a}^\gamma \times \underline{m} \cdot \bar{\omega}'_\gamma \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \bar{l}\bar{A} - \hat{n} \cdot \text{rot} \underline{n} \right) \cdot \bar{v} + \left( \bar{l}\bar{B} - \hat{n} \cdot \text{rot} \underline{m} - \hat{n} \cdot \underline{n} \times \underline{a} \right) \cdot \bar{\omega} \right) \\
 &= \int_a da \left( \bar{l}\bar{A} \cdot \bar{v} + \bar{l}\bar{B} \cdot \bar{\omega} + \hat{n} \cdot \left( \bar{a}^\gamma \times \underline{n} \cdot \bar{v}'_\gamma + \bar{a}^\gamma \times \underline{m} \cdot \bar{\omega}'_\gamma - \underline{n} \times \underline{a} \cdot \bar{\omega} \right) \right) \\
 &= \dot{K} + \int_a da \hat{n} \cdot \left( \bar{a}^\gamma \times \underline{n} \cdot \bar{v}'_\gamma + \bar{a}^\gamma \times \underline{m} \cdot \bar{\omega}'_\gamma - \underline{n} \times \underline{a} \cdot \bar{\omega} \right) \quad (20.84)
 \end{aligned}$$

Hermed defineres effekten  $P_i$  af de indre kræfter  $\underline{n}$  og  $\underline{m}$  ved integralet på højresiden af sidste lighedstegn så effektligningen bliver

$$P_y = \dot{K} + P_i \quad (20.85)$$

Indføres de blandede dobbeltprodukter  $\underline{A} \times \underline{B}$  og  $\underline{A} \cdot^\times$  ved

$$\begin{aligned}
 \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cdot^\times \bar{d}\bar{e} &= \bar{a}(\bar{b} \times \bar{d})(\bar{c} \cdot \bar{e}) \\
 \bar{a}\bar{b}\bar{c} \times \bar{d}\bar{e} &= \bar{a}(\bar{b} \cdot \bar{d})(\bar{c} \times \bar{e})
 \end{aligned} \quad (20.86)$$

jfr. afsnit 4.8, kan man skrive

$$\begin{aligned}
 \bar{a}^\gamma \times \underline{n} \cdot \bar{v}'_\gamma &= \bar{a}^\gamma \bar{v}'_\gamma \cdot^\times \underline{n} = \text{grad} \bar{v} \cdot^\times \underline{n} \\
 \bar{a}^\gamma \times \underline{m} \cdot \bar{\omega}'_\gamma &= \bar{a}^\gamma \bar{\omega}'_\gamma \cdot^\times \underline{m} = \text{grad} \bar{\omega} \cdot^\times \underline{m}
 \end{aligned} \quad (20.87)$$

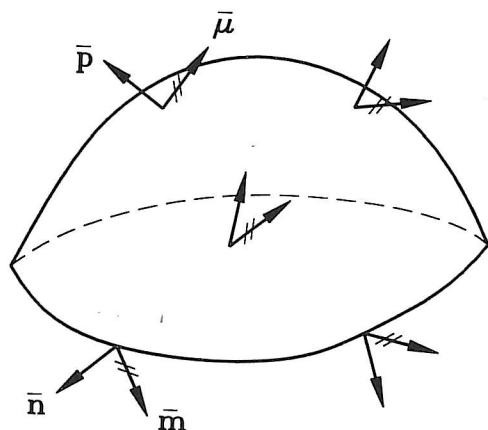
og de indre kræfters effekt bliver

$$P_i = \int_a d\bar{a} \cdot \left( \text{grad} \bar{v} \cdot^\times \underline{n} - \underline{n} \times \underline{a} \cdot^\times \bar{\omega} + \text{grad} \bar{\omega} \cdot^\times \underline{m} \right) \quad (20.88)$$

Ligesom i den endimensionale beskrivelse er vektoren  $\bar{\omega}$  her i den todimensionale beskrivelse ikke nogen rent kinematisk størrelse sådan som tøjningshastighedstensoren er det i den tredimensionale beskrivelse. Der er imidlertid flere forskelle fra den tredimensionale beskrivelse, som skal fremhæves. Spændingsvektoren  $\bar{\sigma}$  bestemmes af spændingstensoren  $\underline{\sigma}$  som  $\bar{\sigma} = \hat{n} \cdot \underline{\sigma}$ , hvor  $\hat{n}$  er normalen til den betragtede snitflade. I modsætning

bestemmes snitkraftvektoren  $\bar{n}$  og snitmomentvektoren  $\bar{m}$ , begge pr. længdeenhed af fladens begrænsningskurve, som henholdsvis  $\bar{n} = \hat{t} \cdot \underline{n}$  og  $\bar{m} = \hat{t} \cdot \underline{m}$ , hvor  $\hat{t}$  er tangenten til begrænsningskurven. Dette forhold er årsagen til, at det er rotationsoperatoren, der optræder i de todimensionale bevægelsesligninger, mens det er divergensoperatoren, der optræder i den tredimensionale beskrivelse. Endnu en forskel har man deri, at mens spændingstensoren  $\underline{\sigma}$  er symmetrisk, er hverken snitkrafttensoren  $\underline{n}$  eller snitmomenttensoren  $\underline{m}$  symmetriske i det generelle tilfælde.

Figur 20.7 viser et fladestykke med påført last  $\bar{p}$  og  $\bar{\mu}$  pr. arealenhed samt snitkræfter  $\bar{n}$  og  $\bar{m}$  pr. længdeenhed af begrænsningskurven.



Figur 20.7

De forskellige definitioner er anført i tabel 20.1, mens bevægelsesligninger og effektlig-  
ning er anført i tabel 20.2.

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \int_h \left( (\mathbf{a} + \zeta \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{g} d\zeta \\
\bar{\mathbf{p}} &= \varphi \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \int_h \varphi \rho \bar{\mathbf{b}} d\zeta \\
l\bar{\mathbf{A}} &= \int_h \varphi \rho (\ddot{\bar{\mathbf{r}}} + \ddot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}}) d\zeta \\
\mathbf{m} &= - \int_h \left( (\mathbf{a} + \zeta \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{g} \times \bar{\boldsymbol{\zeta}} d\zeta \\
\bar{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{\boldsymbol{\zeta}} \times \varphi \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \int_h \varphi \bar{\boldsymbol{\zeta}} \times \rho \bar{\mathbf{b}} d\zeta \\
l\bar{\mathbf{B}} &= \int_h \varphi \bar{\boldsymbol{\zeta}} \times \rho (\ddot{\bar{\mathbf{r}}} + \ddot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}}) d\zeta \\
\mathbf{m} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} &= \int_h \left( (\mathbf{a} + \zeta \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{g} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}} d\zeta \\
\bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} &= \varphi \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}} + \int_h \varphi \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}} d\zeta \\
l\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} &= \int_h \varphi \rho \dot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}} \cdot (\ddot{\bar{\mathbf{r}}} + \ddot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}}) d\zeta
\end{aligned}$$

Tabel 20.1

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot } \mathbf{n} + \bar{\mathbf{p}} &= l\bar{\mathbf{A}} \\
\hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot } \mathbf{m} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{a} + \bar{\boldsymbol{\mu}} &= l\bar{\mathbf{B}} \\
P_y &= \dot{K} + P_i \\
P_y &= \oint_c ds (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) + \int_a da (\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) \\
\dot{K} &= \int_a da (l\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + l\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}) \\
P_i &= \int_a d\bar{a} \cdot (\text{grad } \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathbf{a} \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}} + \text{grad } \bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{m})
\end{aligned}$$

Tabel 20.2

### 20.3 Skaldeformationer

En flade er i en referencetilstand givet ved

$$\bar{R} = \bar{R}(u, v) \quad (20.89)$$

Tangent, normal, første og anden fundamentaltensor betegnes med henholdsvis  $\bar{A}$ ,  $\hat{N}$ ,  $\bar{\bar{A}}$  og  $\bar{\bar{B}}$ . Den deformerede flade bestemmes ved

$$\bar{r} = \bar{r}(\bar{R}, \alpha) \quad (20.90)$$

hvor  $\alpha$  er evolutionsparameteren, så  $\bar{r}(\bar{R}, 0) = \bar{R}$ . På sædvanlig vis bestemmes deformationsgradienttensoren  $\tilde{F}$  ved

$$\tilde{F}^T = \text{Grad } \bar{r} \quad (20.91)$$

og hermed Cauchy deformationstensor  $\tilde{C}$  og strækket  $\Lambda$  hørende til retningen  $\hat{A}$  ved

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} \\ \Lambda^2 &= \hat{A} \cdot \tilde{C} \cdot \hat{A} \end{aligned} \quad (20.92)$$

Begge tensorer  $\tilde{F}$  og  $\tilde{C}$  er todimensionale tensorer, der bestemmer tangenter i den deformerede flades tangentplan

$$\hat{a} = \tilde{F} \cdot \hat{A} / \Lambda \quad (20.93)$$

Med kendte tangenter  $\bar{a}_\gamma$  og dermed de reciprokke  $\bar{a}^\gamma$ , er såvel første fundamentaltensor  $\bar{\bar{a}}$  som normalvektoren  $\hat{n}$  bestemt, og med normalen er også gradienten af normalen, dvs. den deformerede flades anden fundamentaltensor  $\bar{\bar{b}}$ , bestemt. Længdeændringer, vinkelændringer og arealændringer i fladens tangentplan er således bestemt, men hvorledes fladenormalen  $\hat{N}$  deformeres, giver deformationsgradienten  $\tilde{F}$  ingen oplysninger om.

Deformationen af  $\hat{N}$  er beskrevet ved vektoren  $\bar{\omega}$ , der ligesom i den endimensionale beskrivelse må tillægges en kinematisk betydning, hvormed den kan indgå i de konstitutive ligninger. Kun for konstruktionselementer, i hvilke der ikke optræder momenter, dvs.  $\bar{m} = \hat{a} \cdot \bar{m} = \bar{0}$ ,  $\bar{\mu} = \bar{0}$  og  $\bar{l}\bar{B} = \bar{0}$ , og hvor snitkraften ligger i tangent-planen, dvs.  $\bar{n} = \hat{a} \cdot \bar{n} = n^\gamma \bar{a}_\gamma$ , har  $\bar{\omega}$  ingen betydning, som det fremgår af effektudtrykkene. En eksakt todimensional teori, en membranteori, kan kun opstilles i dette tilfælde og de mekaniske størrelser, der indgår i de konstitutive ligninger, er da alene snitkrafttensoren  $\bar{n}$  og f.eks. deformationstensoren  $\tilde{C}$ .



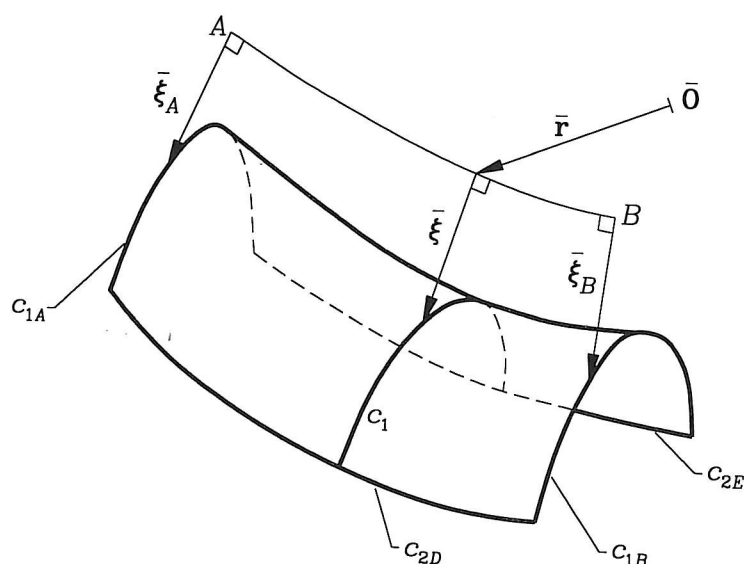
Når der optræder momenter, må  $\bar{\omega}$  defineres som en kinematisk størrelse og den teori, der opstilles, bliver tilnærmet. Yderligere tilnærmelser, som medfører indre bindinger med tilhørende reaktionskræfter, indføres ofte. Som et eksempel skal nævnes ustrækkelighed i tangentplanen, dvs.  $\bar{C} = \bar{a}$ , med snitkrafttensoren  $\bar{n}$  ubestemt til følge, og som et andet eksempel  $\bar{\omega}$  parallel med  $\hat{n}$  med den konsekvens, at komposanten af  $\bar{n} = \hat{a} \cdot \bar{n}$  parallel med normalen  $\hat{n}$  bliver ubestemt for alle tangenter  $\bar{a}$ .

## 21 FRA 2 DIMENSIONER TIL 1

I stedet for at gå direkte fra 3 dimensioner til 1, når man vil give en endimensional beskrivelse af tredimensionale fænomener, kan man i nogle tilfælde lige så godt gå først fra 3 dimensioner til 2 og derefter fra 2 dimensioner til 1.

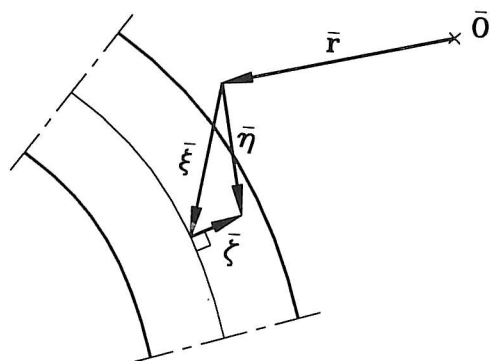
### 21.1 Bevægelsesligninger og effektligning for tyndvæggede bjælker

En del af et todimensionalt konstruktionselement, der skal beskrives som endimensionalt, er vist i figur 21.1. Vektoren  $\bar{r}$  er stedvektor til den kurve, hvortil der refereres,



Figur 21.1

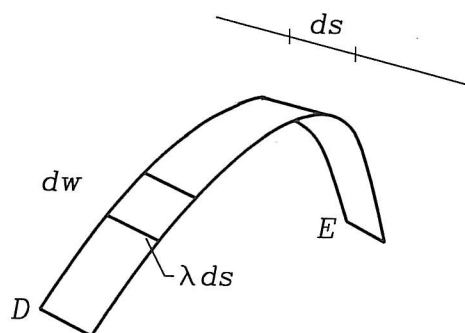
$\bar{r} + \bar{\xi}$  er stedvektor til den todimensionale referenceplade, og  $\bar{r} + \bar{\eta}$  er stedvektoren til et vilkårligt punkt i et tværsnit. I figur 21.2 er vektorerne  $\bar{r}$ ,  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  og  $\bar{\zeta}$  i et tværsnit vist, hvor man har  $\bar{r} + \bar{\eta} = \bar{r} + \bar{\xi} + \bar{\zeta}$ .



Figur 21.2

Fladestykket i figur 21.1 begrænses af randkurven  $c$ , som er delt i de to tværsnit  $c_{1A}$  og  $c_{1B}$  samt de to længdesnit  $c_{2D}$  og  $c_{2E}$ .

Et infinitesimalt element, begrænset af to tværsnit med indbyrdes afstand  $ds$  målt



Figur 21.3

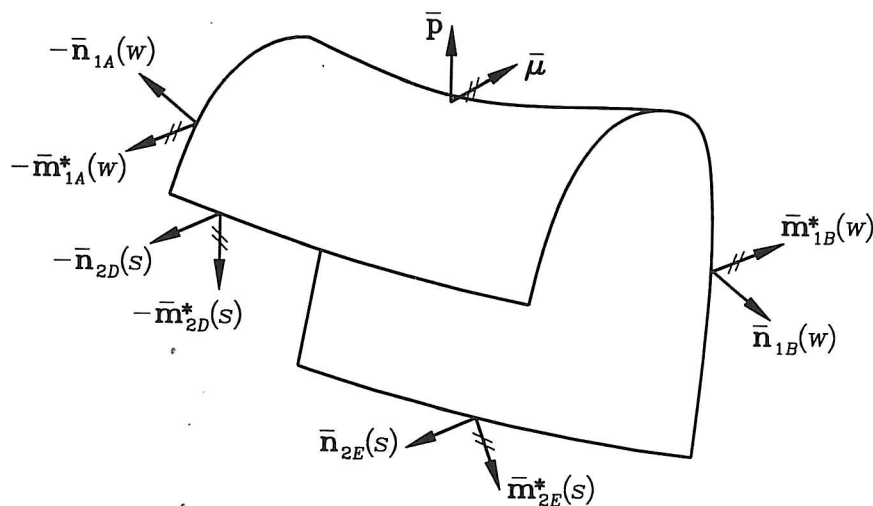
langs referencekurven, er vist i figur 21.3. På fladen er arealelementets størrelse

$$da = \lambda ds dw \quad (21.1)$$

hvor  $w$  måles langs tværsnittet, og

$$\lambda = \lambda(\bar{r}, \bar{\xi}) \quad (21.2)$$

er en faktor, som afhænger af  $\bar{r}$  og  $\bar{\xi}$ . Symboler, der optræder i såvel den endimensionale som den todimensionale beskrivelse, er forsynet med en stjerne, når der refereres til to dimensioner. Det drejer sig om  $\bar{A}^*$ ,  $\bar{m}^*$ ,  $\bar{B}^*$  og  $\bar{w}^*$ .



Figur 21.4

For de kræfter, der er antydnet i figur 21.4, kan man nu opstille en kraftligning ud fra ligning (20.64)

$$\oint_c ds \bar{n} + \int_a da \bar{p} = \int_a da l \bar{A}^* \quad (21.3)$$

Ligningen kan skrives

$$- \int_{c_{1A}} dw \bar{n}_A + \int_{c_{1B}} dw \bar{n}_B - \int_{c_{2D}} ds \lambda \bar{n}_D + \int_{c_{2E}} ds \lambda \bar{n}_E + \int_a da \bar{p} = \int_a da l \bar{A}^* \quad (21.4)$$

eller, med

$$\bar{F} = \int_{c_1} dw \bar{n}_1 \quad (21.5)$$

som

$$-\bar{F}_A + \bar{F}_B + \int_A^B ds \left( -\lambda \bar{n}_{2D} + \lambda \bar{n}_{2E} + \int_{c_1} dw \lambda \bar{p} \right) = \int_A^B ds \int_{c_1} dw \lambda l \bar{A}^* \quad (21.6)$$

Med

$$\begin{aligned} \bar{q} &= -\lambda \bar{n}_{2D} + \lambda \bar{n}_{2E} + \int_{c_1} dw \lambda \bar{p} = [\lambda \bar{n}_2]_D^E + \int_D^E dw \lambda \bar{p} \\ \mu \bar{A} &= \int_{c_1} dw \lambda l \bar{A}^* \end{aligned} \quad (21.7)$$

har man således

$$d\bar{F}/ds + \bar{q} = \mu \bar{A} \quad (21.8)$$

Tilsvarende kan man for de kræfter og momenter, der er antydnet i figur 21.4, opstille en momentligning ud fra ligning (20.76)

$$\oint_c ds \left( \bar{m}^* + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times \bar{n} \right) + \int_a da \left( \bar{\mu} + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times \bar{p} \right) = \int_a da \left( l \bar{B}^* + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times l \bar{A}^* \right) \quad (21.9)$$

Denne ligning kan skrives

$$\begin{aligned} & - \int_{c_{1A}} dw \left( \bar{m}_{1A}^* + (\bar{r}_A + \bar{\xi}) \times \bar{n}_{1A} \right) + \int_{c_{1B}} dw \left( \bar{m}_{1B}^* + (\bar{r}_B + \bar{\xi}) \times \bar{n}_{1B} \right) + \\ & - \int_{c_{2D}} ds \lambda \left( \bar{m}_{2D}^* + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times \bar{n}_{2D} \right) + \int_{c_{2E}} ds \lambda \left( \bar{m}_{2E}^* + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times \bar{n}_{2E} \right) + \\ & + \int_a da \left( \bar{\mu} + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times \bar{p} \right) = \int_a da \left( l \bar{B}^* + (\bar{r} + \bar{\xi}) \times l \bar{A}^* \right) \end{aligned} \quad (21.10)$$

som bliver

$$\begin{aligned}
& -\bar{r}_A \times \bar{F}_A - \int_{c_1A} dw (\bar{m}_{1A}^* + \bar{\xi} \times \bar{n}_{1A}) + \bar{r}_B \times \bar{F}_B + \int_{c_1B} dw (\bar{m}_{1B}^* + \bar{\xi} \times \bar{n}_{1B}) + \\
& + \int_A^B ds (-\lambda \bar{m}_{2D}^* + \lambda \bar{m}_{2E}^*) + \bar{r} \times (-\lambda \bar{n}_{2D} + \lambda \bar{n}_{2E}) - \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_{2D} + \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_{2E} + \\
& \int_A^B ds \int_{c_1} dw \lambda (\bar{\mu} + \bar{r} \times \bar{p} + \bar{\xi} \times \bar{p}) = \int_A^B ds \int_{c_1} dw \lambda (\bar{l}\bar{B}^* + \bar{r} \times \bar{l}\bar{A}^* + \bar{\xi} \bar{A}^*)
\end{aligned} \quad (21.11)$$

Med

$$\bar{M} = \int_{c_1} dw (\bar{m}_1^* + \bar{\xi} \times \bar{n}_1) \quad (21.12)$$

får man

$$\begin{aligned}
& -\bar{r}_A \times \bar{F}_A - \bar{M}_A + \bar{r}_B \times \bar{F}_B + \bar{M}_B + \int_A^B ds \left( \bar{r} \times (-\lambda \bar{n}_{2D} + \lambda \bar{n}_{2E}) + \int_{c_1} dw \lambda \bar{p} \right) \\
& + \int_A^B ds (-\lambda \bar{m}_{2D}^* + \lambda \bar{m}_{2E}^* - \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_{2D} + \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_{2E}) + \int_{c_1} dw (\lambda \bar{\mu} + \bar{\xi} \times \lambda \bar{p}) \Bigg) = \\
& = \int_A^B ds \int_{c_1} dw \lambda (\bar{l}\bar{B}^* + \bar{r} \times \bar{l}\bar{A}^* + \bar{\xi} \bar{A}^*)
\end{aligned} \quad (21.13)$$

som med

$$\begin{aligned}
\bar{m} &= -\lambda \bar{m}_{2D}^* + \lambda \bar{m}_{2E}^* - \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_{2D} + \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_{2E} + \int_{c_1} dw (\lambda \bar{\mu} + \bar{\xi} \times \lambda \bar{p}) \\
&= \left[ \lambda \bar{m}_2^* + \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_2 \right]_D^E + \int_D^E dw (\lambda \bar{\mu} + \bar{\xi} \times \lambda \bar{p})
\end{aligned} \quad (21.14)$$

$$\mu \bar{B} = \int_{c_1} dw \lambda (\bar{l}\bar{B}^* + \bar{\xi} \times \bar{l}\bar{A}^*)$$

bliver

$$\int_A^B \left( d(\bar{r} \times \bar{F})/ds + d\bar{M}/ds + \bar{r} \times \bar{q} + \bar{m} \right) = \int_A^B ds (\bar{r} \times \mu \bar{A} + \mu \bar{B}) \quad (21.15)$$

eller

$$\hat{t} \times \bar{F} + \bar{r} \times d\bar{F}/ds + d\bar{M}/ds + \bar{r} \times \bar{q} + \bar{m} = \bar{r} \times \mu \bar{A} + \mu \bar{B} \quad (21.16)$$

og hermed

$$d\overline{M}/ds + \hat{t} \times \overline{F} + \overline{m} = \mu \overline{B} \quad (21.17)$$

De ydre kræfters effekt  $P_y$  er ifølge (20.83)

$$\begin{aligned} P_y &= \oint_c ds \left( \overline{n} \cdot (\dot{\overline{r}} + \dot{\overline{\xi}}) + \overline{m}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) + \int_a da \left( \overline{p} \cdot (\dot{\overline{r}} + \dot{\overline{\xi}}) + \overline{\mu} \cdot \overline{\omega}^* \right) \\ &= -\overline{F}_A \cdot \overline{v}_A + \overline{F}_B \cdot \overline{v}_B - \int_{c_{1A}} dw \left( \overline{n}_{1A} \cdot \dot{\overline{\xi}} + \overline{m}_{1A}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) + \int_{c_{1B}} dw \left( \overline{n}_{1B} \cdot \dot{\overline{\xi}} + \overline{m}_{1B}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) \\ &\quad + \int_A^B ds \overline{v} \cdot \left( -\lambda \overline{n}_{2D} + \lambda \overline{n}_{2E} + \int_{c_1} dw \lambda \overline{p} \right) \\ &\quad + \int_A^B ds \left( -\lambda \overline{n}_{2D} \cdot \dot{\overline{\xi}} + \lambda \overline{n}_{2E} \cdot \dot{\overline{\xi}} - \lambda \overline{m}_{2D}^* \cdot \overline{\omega}^* + \lambda \overline{m}_{2E}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) \\ &\quad + \int_A^B ds \int_{c_1} dw \lambda \left( \overline{p} \cdot \dot{\overline{\xi}} + \overline{\mu} \cdot \overline{\omega}^* \right) \end{aligned} \quad (21.18)$$

som med

$$\begin{aligned} \overline{M} \cdot \overline{\omega} &= \int_{c_1} dw \left( \overline{n}_1 \cdot \dot{\overline{\xi}} + \overline{m}_1^* \cdot \overline{\omega}^* \right) \\ \overline{m} \cdot \overline{\omega} &= -\lambda \overline{n}_{2D} \cdot \dot{\overline{\xi}} + \lambda \overline{n}_{2E} \cdot \dot{\overline{\xi}} - \lambda \overline{m}_{2D}^* \cdot \overline{\omega}^* + \lambda \overline{m}_{2E}^* \cdot \overline{\omega}^* \\ &\quad + \int_{c_1} dw \lambda \left( \overline{p} \cdot \dot{\overline{\xi}} + \overline{\mu} \cdot \overline{\omega}^* \right) = \left[ \lambda \overline{m}_2^* \cdot \overline{\omega}^* + \lambda \overline{n}_2 \cdot \dot{\overline{\xi}} \right]_D^E + \int_D^E dw \lambda \left( \overline{\mu} \cdot \overline{\omega}^* + \overline{p} \cdot \dot{\overline{\xi}} \right) \end{aligned} \quad (21.19)$$

bliver

$$P_y = \left[ \overline{F} \cdot \overline{v} + \overline{M} \cdot \overline{\omega} \right]_A^B + \int_A^B ds \left( \overline{q} \cdot \overline{v} + \overline{m} \cdot \overline{\omega} \right) \quad (21.20)$$

Den materielle tidsaffledede af den kinetiske energi  $\dot{K}$  er ifølge (20.83)

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \int_a da \left( l\overline{A}^* \cdot (\dot{\overline{r}} + \dot{\overline{\xi}}) + l\overline{B}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) \\ &= \int_A^B ds \int_{c_1} dw \lambda \left( l\overline{A}^* \cdot \overline{v} + l\overline{A}^* \cdot \dot{\overline{\xi}} + l\overline{B}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) \end{aligned} \quad (21.21)$$

som med

$$\mu \overline{B} \cdot \overline{\omega} = \int_{c_1} dw \lambda \left( l\overline{A}^* \cdot \dot{\overline{\xi}} + l\overline{B}^* \cdot \overline{\omega}^* \right) \quad (21.22)$$

bliver

$$\dot{K} = \int_A^B ds (\mu \bar{A} \cdot \bar{V} + \mu \bar{B} \cdot \bar{\omega}) \quad (21.23)$$

Ovenstående viser, at bevægelsesligningerne bliver de samme i den endimensionale beskrivelse, hvad enten man går direkte fra 3 dimensioner til 1, eller man tager omvejen fra 3 dimensioner til 2 og derfra til 1. Da også udtrykkene for de ydre kræfters effekt og for den materielle tidsafledede af den kinetiske energi er de samme, bliver udtrykket for de indre kræfters effekt ligeledes som fundet i afsnit 19.

Efter denne konstatering ville ovenstående undersøgelse være uinteressant, hvis den ikke kunne give andre resultater. I tabel 21.1 er samlet definitionerne på de størrelser, som indgår i ligningerne, når man går fra 2 dimensioner til 1, og som det fremgår af en

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \int_D^E dw \bar{n}_1 \\ \bar{q} &= [\lambda \bar{n}_2]_D^E + \int_D^E dw \lambda \bar{p} \\ \mu \bar{A} &= \int_D^E dw \lambda l \bar{A}^* \\ \bar{M} &= \int_D^E dw (\bar{m}_1^* + \bar{\xi} \times \bar{n}_1) \\ \bar{m} &= [\lambda \bar{m}_2^* + \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_2]_D^E + \int_D^E dw \lambda (\bar{\mu} + \bar{\xi} \times \bar{p}) \\ \mu \bar{B} &= \int_D^E dw \lambda (l \bar{B}^* + \bar{\xi} \times l \bar{A}^*) \\ \bar{M} \cdot \bar{\omega} &= \int_D^E dw (\bar{n}_1 \cdot \dot{\bar{\xi}} + \bar{m}_1^* \cdot \bar{\omega}^*) \\ \bar{m} \cdot \bar{\omega} &= [\lambda \bar{m}_2^* \cdot \bar{\omega}^* + \lambda \bar{n}_2 \cdot \dot{\bar{\xi}}]_D^E + \int_D^E dw \lambda (\bar{\mu} \cdot \bar{\omega}^* + \bar{p} \cdot \dot{\bar{\xi}}) \\ \mu \bar{B} \cdot \bar{\omega} &= \int_D^E dw \lambda (l \bar{A}^* \cdot \dot{\bar{\xi}} + l \bar{B}^* \cdot \bar{\omega}^*) \end{aligned}$$

Tabel 21.1.

sammenligning af tabel 21.1 med tabel 19.1 er disse definitioner forskellige med hensyn til detaljeringsgraden. Dette forhold åbner mulighed for at opstille mere detaljerede bevægelsesligninger og mere detaljerede udtryk for de ydre kræfters effekt, den materielle tidsafledede af den kinetiske energi og de indre kræfters effekt.



Indføres således

$$\overline{M} = \overline{M}_m + \overline{M}_n \quad (21.24)$$

hvor

$$\overline{M}_m = \int_D^E dw \overline{m}_1^* \quad (21.25)$$

$$\overline{M}_n = \int_D^E dw \bar{\xi} \times \bar{n}_1$$

$$\overline{m} = \overline{m}_m + \overline{m}_n \quad (21.26)$$

hvor

$$\overline{m}_m = \left[ \lambda \overline{m}_2^* \right]_D^E + \int_D^E dw \lambda \bar{\mu} \quad (21.27)$$

$$\overline{m}_n = \left[ \bar{\xi} \times \lambda \bar{n}_2 \right]_D^E + \int_D^E dw \lambda \bar{\xi} \times \bar{p}$$

$$\mu \overline{B} = \mu \overline{B}_m + \mu \overline{B}_n \quad (21.28)$$

hvor

$$\mu \overline{B}_m = \int_D^E dw \lambda l \overline{B}^* \quad (21.29)$$

$$\mu \overline{B}_n = \int_D^E dw \lambda \bar{\xi} \times l \overline{A}^*$$

$$\overline{M} \cdot \overline{\omega} = \overline{M}_m \cdot \overline{\omega}_m + \overline{M}_n \cdot \overline{\omega}_n \quad (21.30)$$

hvor

$$\overline{M}_m \cdot \overline{\omega}_m = \int_D^E dw \overline{m}_1^* \cdot \overline{\omega}^* \quad (21.31)$$

$$\overline{M}_n \cdot \overline{\omega}_n = \int_D^E dw \bar{n}_1 \cdot \dot{\bar{\xi}}$$

$$\overline{m} \cdot \overline{\omega} = \overline{m}_m \cdot \overline{\omega}_m + \overline{m}_n \cdot \overline{\omega}_n \quad (21.32)$$

hvor

$$\overline{m}_m \cdot \overline{\omega}_m = \left[ \lambda \overline{m}_2^* \cdot \overline{\omega}^* \right]_D^E + \int_D^E dw \lambda \overline{\mu} \cdot \overline{\omega}^* \quad (21.33)$$

$$\overline{m}_n \cdot \overline{\omega}_n = \left[ \lambda \overline{n}_2 \cdot \dot{\overline{\xi}} \right]_D^E + \int_D^E dw \lambda \overline{p} \cdot \dot{\overline{\xi}}$$

$$\text{og } \mu \overline{B} \cdot \overline{\omega} = \mu \overline{B}_m \cdot \overline{\omega}_m + \mu \overline{B}_n \cdot \overline{\omega}_n \quad (21.34)$$

hvor

$$\mu \overline{B}_m \cdot \overline{\omega}_m = \int_D^E dw \lambda l \overline{B}^* \cdot \overline{\omega}^* \quad (21.35)$$

$$\mu \overline{B}_n \cdot \overline{\omega}_n = \int_D^E dw \lambda l \overline{A}^* \cdot \dot{\overline{\xi}}$$

bliver bevægelsesligningerne

$$\begin{aligned} d\overline{F}/ds + \overline{q} &= \mu \overline{A} \\ d\overline{M}_m/ds + d\overline{M}_n/ds + \overline{t} \times \overline{F} + \overline{m}_m + \overline{m}_n &= \mu \overline{B}_m + \mu \overline{B}_n \end{aligned} \quad (21.36)$$

Udtrykkene for  $P_y$  og  $\dot{K}$  bliver

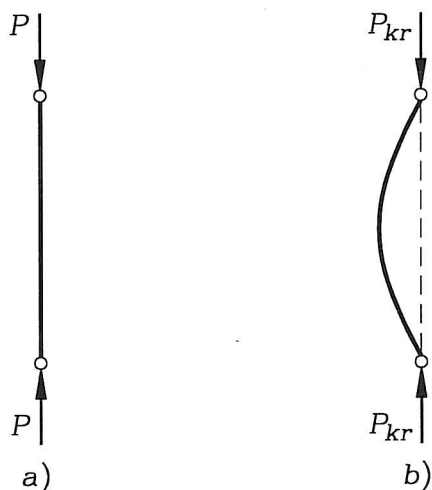
$$\begin{aligned} P_y &= \left[ \overline{F} \cdot \overline{v} + \overline{M}_m \cdot \overline{\omega}_m + \overline{M}_n \cdot \overline{\omega}_n \right]_A^B + \int_A^B ds \left( \overline{q} \cdot \overline{v} + \overline{m}_m \cdot \overline{\omega}_m + \overline{m}_n \cdot \overline{\omega}_n \right) \\ \dot{K} &= \int_A^B ds \left( \mu \overline{A} \cdot \overline{v} + \mu \overline{B}_m \cdot \overline{\omega}_m + \mu \overline{B}_n \cdot \overline{\omega}_n \right) \end{aligned} \quad (21.37)$$

hvormed  $P_i$  bliver

$$\begin{aligned} P_i &= \int_A^B ds \left( \overline{F} \cdot d\overline{v}/ds + \overline{M}_m \cdot d\overline{\omega}_m/ds + \overline{M}_n \cdot d\overline{\omega}_n/ds \right) \\ &\quad - \left( d\overline{M}_n/ds + \hat{t} \times \overline{F} + \overline{m}_n - \mu \overline{B}_n \right) \cdot \overline{\omega}_m \\ &\quad - \left( d\overline{M}_m/ds + \hat{t} \times \overline{F} + \overline{m}_m - \mu \overline{B}_m \right) \cdot \overline{\omega}_n \end{aligned} \quad (21.38)$$

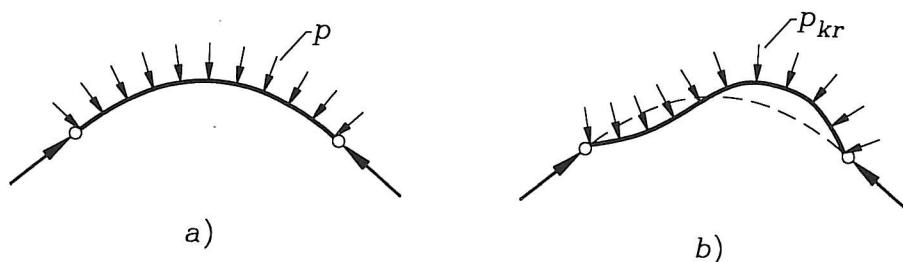
## 22 STABILITET

For tynde konstruktionselementer er det et karakteristisk forhold, at visse deformationer er væsentligt lettere at fremkalde end andre. Dette medfører f.eks., at der kan optræde andre ligevægtsstillinger end tilsigtet. Figur 22.1 a viser en lige bjælke påvirket af aksialkræfter  $P$ .



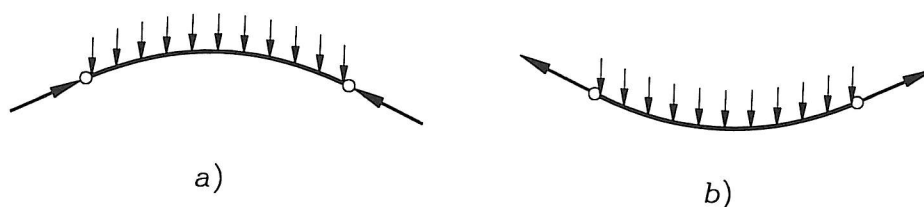
Figur 22.1

For en vis værdi af kraften  $P$ , en kritisk værdi  $P_{kr}$ , er den udbøjede ligevægtsstilling, vist i figur 22.1 b mulig, og den retliniede ligevægtsstilling er instabil. Figur 22.2 a



Figur 22.2

viser en cirkelkrum bjælke påvirket af en radiallylast  $p$ , og figur 22.2 b viser en udbøjet ligevægtsstilling svarende til den kritiske last  $p_{kr}$ . Hvis buen er tilstrækkelig flad, kan fænomenet gennemslag optræde, som vist i figur 22.3.



Figur 22.3

Ligevægtsstillinger forskellige fra de forventede/tilsigtede forekommer, fordi det er lettere at bøje bjælker end at trykke dem sammen, deres bøjningsstivhed er lille, mens aksialstivheden er stor. Tilsvarende er skallers bøjningsstivhed lille, mens deres membranstivhed er stor, og tilsvarende instabile ligevægtsstillinger optræder også for disse konstruktionselementer.

For både en- og todimensionale konstruktionselementers vedkommende er der i ovenstående eksempler tale om instabile ligevægtstilstande, og fænomenerne betegnes da også som *statiske stabilitetsproblemer*. Der forekommer imidlertid også *kinetiske stabilitetsproblemer*. En tværsvingende bjælke f.eks. vil komme i resonans, når en periodisk last rammer en egenfrekvens, og en bjælke, der roterer om sin akse, vil for visse omdrejningshastigheder udføre tværsvingninger. Endelig skal det nævnes, at såvel bjælker som skaller, der bevæger sig i strømmende medier, under visse omstændigheder vil udføre tværsvingninger.

Hvorvidt en konfiguration er stabil, kan afgøres ved at undersøge, om en vilkårligt lille forstyrrelse af konfigurationen resulterer i vilkårligt små ændringer af flytninger og hastigheder til enhver tid efter forstyrrelsen.



